Frazioni multiple graduate e divisioni tra interi

Franco Ghione

Nel capitolo quinto *liber abaci* **(V.1.2)** Fibonacci introduce il calcolo con le frazioni al quale sarà dedicato tutto il capitolo quinto, sesto e settimo cominciando col definire il numeratore e il denominatore di una frazione:

Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato (*denominatus*) e quello superiore è chiamato denominante (*denominans*)

Il denominatore è il numero denominato, quello cioè che fissa il numero di parti nelle quali è stata divisa l'unità, e il numeratore è quello denominante, cioè quello che denomina quante di quelle parti si debbano prendere, così 3 parti di 4, o 3 di 4, o $\frac{3}{4}$ è una espressione abbreviata per dire che si è "rotto" l'intero in 4 parti uguali e di queste parti se ne prendono tre.

Ancora se 2 è messo sopra il 3 così $\frac{2}{3}$, intende due parti delle tre parti dell'uno intero, cioè due terzi.

Più avanti Fibonacci definisce altri tipi di frazioni, per lo più scomparse dalla letteratura matematica moderna, una delle quali, particolarmente utilizzata nel corso del *liber*, è quella che noi proponiamo di chiamare frazione multipla graduata. Si tratta di frazioni nelle quali compaiono uno stesso numero (maggiore o uguale a uno) di numeratori e denominatori

Le frazioni, che sono in una sola linea, sono dette essere in posizione (*in gradibus*), e la prima posizione di quelle è la frazione che è all'inizio della linea nella parte destra. La seconda posizione è la frazione che segue verso sinistra. **(V.1.4)**

Una frazione multipla di secondo grado è una frazione che si scrive $\frac{a_2 \ a_1}{b_2 \ b_1}$ dove

Il numero che sia stato posto sopra il numero all'inizio della parte destra della linea, indicherà la parte o le parti del numero stesso posto sotto, come abbiamo già detto. Quello dunque sopra il secondo esprime le parti dello stesso secondo, delle parti del primo numero posto sotto.

Così l'espressione $\frac{a_2\ a_1}{b_2\ b_1}$ è una espressione abbreviata per descrivere una quantità ottenuta secondo il seguente preciso procedimento: *l'uno intero* viene diviso in b_1 parti e di queste se ne prendono a_1, ma a queste si aggiungono un certo numero a_2 di parti più piccole ottenute dividendo ogni parte precedente in ulteriori b_2 parti. Dunque

$$\frac{a_2\ a_1}{b_2\ b_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2}$$

In generale possiamo avere frazioni multiple di grado grande quanto si vuole: dividiamo l'unità in b_1 parti poi dividiamo ognuna di queste parti in b_2 e ognuna di queste in b_3 e così via; fatto questo prendiamo a_1 parti del primo tipo, a queste sommiamo a_2 parti del secondo tipo, e poi a_3 parti del terzo e così via. Otteniamo una frazione multipla digrado n definita dalla formula:

$$\frac{a_n\ \dots\ a_3\ a_2\ a_1}{b_n\ \dots\ b_3\ b_2\ b_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_3}{b_1 b_2 b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}$$

Fibonacci suggerisce di ordinare i denominatori in ordine decrescente da destra a sinistra

$$b_n \le b_{n-1} \le \dots \le b_1.$$

Notiamo che, in questo caso le parti che via via si aggiungono diventano sempre più piccole crescendo i denominatori in forma "esponenziale". Ciò permette, come vedremo, di approssimare una frazione con numeri più "significativi".
Come caso particolare, spesso considerato in Fibonacci, si ha quando i numeratori sono tutti nulli tranne l'ultimo: ovviamente

$$\frac{1}{b_n b_{n-1} \dots b_1} = \frac{1\ \ 0\ \ .\ .\ .\ \ 0}{b_n\ \ b_{n-1}\ \ .\ .\ .\ \ b_1}$$

e, per Fibonacci, trovare la *regola* di un numero intero b, significa trovare la sua decomposizione in fattori primi.

Un primo uso di questa frazione si trova sembra nel papiro di Rhind. Si tratta di dividere 5 hekat (una unità di volume egiziana) in 12 persone. Se dividiamo ogni hekat in tre parti ne otteniamo 15 e dandone una a ogni persona ne avanzano 3, dividendo ulteriormente ognuna delle parti precedenti per 4 ne otteniamo 12 e, di queste, e ne possiamo dare una a ciascuno. Dunque ognuno riceverà un terzo di hekat più un quarto di un terzo di hekat. In simboli:

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4\times 3} = \frac{1\ \ 1}{4\ \ 3}.$$

Scrive Giusti[1]

Nei trattati d'abaco successivi, dal trattato di Aritmetica di Paolo dall'Aaco, ca 1350, fino al Trattato d'Aritmetica di Giseppe Maria Figatelli, pubblicato nel 1664 e ristampato più volte per tutto il Settecento, il procedimento di passaggio dalla frazione multipla a quella ordinaria si trova sotto il nome di "infilzare i rotti". Il passaggio inverso, dalla frazione ordinaria alla multipla (o come si diceva ai rotti in filza, cioè 'in fila') è chiamato dal Figatelli "traslatare i rotti"

Traslatando i rotti di una frazione multipla di secondo grado otteniamo:

$$\frac{a_2}{b_2}\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2}{b_1 b_2}$$

Viceversa da una frazione ordinaria $\frac{a}{b_2 b_1}$ il cui denominatore è decomposto nel prodotto di due interi, possiamo "*infilzare i rotti*" cioè scrivere la frazione come una frazione multipla di secondo grado. Ber fare questo basta dividere il numeratore a per b_2 (il primo denominatore a sinistra) e il quoziente ottenuto per b_1 collocando i resti in corrispondenza ai divisori come indicato più sotto:

$$a = b_2\, q_2 + a_2 \qquad 0 \leq a_2 < b_2,$$
$$q_2 = b_1\, q + a_1 \qquad 0 \leq a_1 < b_1$$

da cui $a = b_2\,(b_1\, q + a_1) + a_2 = b_1\, b_2\, q + b_2\, a_1 + a_2$ e quindi

$$\frac{a}{b_2 b_1} = q + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} = q + \frac{a_2}{b_2}\frac{a_1}{b_1} \qquad \text{dove } 0 \leq a_1 < b_1 \ \text{ e } \ 0 \leq a_2 < b_2,$$

Il numero q così trovato è la parte intera della frazione, cioè è il risultato della divisione di a per $b_2 b_1$ mentre $\frac{a_2}{b_2}\frac{a_1}{b_1}$ è il resto infatti risulta $\frac{a_2}{b_2}\frac{a_1}{b_1} < 1$ dato che il suo numeratore è minore del denominatore:

$$b_2\, a_1 + a_2, < b_2\, a_1 + b_2 = b_2\,(a_1+1) \leq b_2\, b_1$$

Una frazione multipla di grado 2 i cui numeratori sono minori dei numeratori, in analogia con quelle ordinarie si dice propria. Saranno queste quelle generalmente trattate da Fibonacci.

1 Enrico Giusti e altri, *Un ponte sul mediterraneo. Leonardo pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Polistampa, 2002

Osserviamo che, in conseguenza della forte influenza araba su questa materia, la lettura di un testo scritto è da sinistra a destra mentre la scrittura della espressione matematica, di provenienza per lo più araba, è da destra a sinistra per cui, ad esempio, l' espressione $\frac{a_2\ a_1}{b_2\ b_1}q$ si legge q e (il più mancando il simbolo + si esprime con un "e" congiunzione) a_1 a_2 fratto b_1 b_2.

Le frazioni multiple sono molto comode quando certe unità di misura sono divise in parti e le parti in altre parti. Ad esempio ai tempi di Fibonacci la libra, che era una unità di conto molto diffusa, era divisa in 20 soldi e un soldo in 12 denari. Se a denota un certo numero di denari allora la frazione $\frac{a}{240}$ di libra scritta come frazione graduata fornirà il numero di libre di soldi e di denari complessivi. Ad esempio la frazione $\frac{9\ \ 5}{12\ 20}7$ rappresenta una somma di 7 libre e 5 ventesimi di libra e 9 duecentoquarantesimi di libra, cioè 7 libre 5 soldi e 9 denari. Ugualmente una giornata è divisa in 24 ore, ogni ora in 60 minuti e ogni minuto in 60 secondi quindi il tempo in giorni dato dall'espressione

$$\frac{9\ \ 7}{60\ 24}2 = 2+\frac{7}{24}+\frac{9}{24\times 60}$$

rappresenta 2 giorni, 7 ventiquattresimi di un giorno (cioè 7 ore) e 9 mille quattrocento quarantesimi di giorno (cioè 9 minuti). *Traslatando* i rotti si ottiene il numero complessivo 429 minuti.

Se l' unità di misura è suddivisa in parti di parti sempre più piccole avremo bisogno di frazioni multiple di grado più alto. Lo studio di queste frazioni è più complicato solo dal punto di vista formale ma le idee coinvolte sono le stesse di quelle che abbiamo spiegato nel caso di grado 2.

In generale una frazione multipla di grado n

$$\frac{a_n\ \ldots\ a_3\ a_2\ a_1}{b_n\ \ldots\ b_3\ b_2\ b_1} = \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_1 b_2}+\frac{a_3}{b_1 b_2 b_3}+\ldots+\frac{a_n}{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}$$

dà luogo a una frazione ordinaria, *traslatando i rotti,* con una semplicissima ricetta: si parte dal primo numero a destra del numeratore a_1 e di moltiplica per tutti i denominatori alla sua sinistra, si aggiunge il secondo numero del numeratore a_2 e di moltiplica per tutti i denominatori alla sua sinistra e si ripete l'operazione fino a esaurire i numeri del numeratore; il risultato ottenuto si divide per il prodotto di tutti i denominatori.

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_1b_2}+\frac{a_3}{b_1b_2b_3}+\ldots+\frac{a_n}{b_1b_2b_3\ldots b_n}=\frac{a_1b_2b_3\ \ldots\ b_n+a_2b_3b_4\ldots\ b_n+\ldots+a_{n-1}b_n+a_n}{b_1b_2b_3\ldots\ b_n}$$

E' intanto possibile semplificare queste frazioni graduate in modo che $a_i < b_i$ per ogni indice i. Supponiamo che $a_n < b_n$, $a_{n-1} < b_{n-1}$, ... , $a_{k-1} < b_{k-1}$ e che $a_k \geq b_k$. Dividiamo a_k per b_k otteniamo

$$a_k = b_k\, q + r_k \quad \text{con} \quad 0 \leq r_k < b_k .$$

Passando alle frazioni abbiamo:

$$\ldots+\frac{a_{k-1}}{b}+\frac{a_k}{bb_k}+\ldots=\ldots+\frac{a_{k-1}}{b}+\frac{qb_k+r_k}{bb_k}+\ldots=\ldots+\frac{a_{k-1}}{b}+\frac{q}{b}+\frac{r_k}{bb_k}+\ldots=\ldots+\frac{a_{k-1}+q}{b}+\frac{r_k}{bb_k}+\ldots$$

In questo modo abbiamo sistemato la frazione k-esima senza modificare le frazioni con indice maggiore. Una semplice induzione a scendere, permette di formalizzare l'argomento semplificando via via le frazioni fino ad arrivare alla prima frazione.

La logica di questa dimostrazione è molto intuitiva. Pensando ancora all'esempio dei conti, se abbiamo più di 12 denari possiamo, per ogni 12 denari aumentare di uno il numero dei soldi fino a quando il numero dei denari è minore di 12, ugualmente se abbiamo più di 20 sodi possiamo per ogni 20 soldi aumentare il numero delle libre fino a quando il numero dei soldi è più piccolo di 20.

Per induzione sul grado della frazione multipla, possiamo verificare che

se $a_i < b_i$ per ogni i allora $\frac{a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1}{b_n\ b_{n-1}\ \ldots\ b_2\ b_1}<1$

La cosa è vera per n =1. Per ipotesi induttiva abbiamo

$$\frac{a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1}{b_n\ b_{n-1}\ \ldots\ b_2\ b_1}<1$$

e dobbiamo verificare che la stessa cosa avviene aumentando di uno il grado.
L'argomento è simile a quello usato per il grado due:

$\frac{a_{n+1}\ a_n\ \ldots\ a_2\ a_1}{b_{n+1}\ b_n\ \ldots\ b_2\ b_1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}b}+\frac{a}{b}$ dove $a_{n+1} < b_{n+1}$ per ipotesi e $a < b$ per l'ipotesi induttiva.

Ma $a_{n+1} + a\, b_{n+1} < b_{n+1} + a\, b_{n+1} = (1+a)\, b_{n+1} \leq bb_{n+1}$.

Anche nel caso generale possiamo "infilzare i rotti" cioè passare da una frazione ordinaria a una frazione multipla di grado n: si dovrà, come nel caso di grado due, di eseguire delle divisioni di divisioni. Sia

$$\frac{a}{b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1}$$

la frazione da trasformare. Fibonacci consiglia, per motivi di semplicità, di scrivere i rotti in ordine decrescente cioè $b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ e indica l'algoritmo seguente come l'algoritmo per eseguire la divisione quando il divisore è il prodotto di più termini. Il suo scopo è quello di semplificare il più possibile l'operazione di divisione che ovviamente risulta più facile se il divisore è più piccolo.
Invece di dividere direttamente per $b_n\ b_{n-1} \dots b_2\ b_1$ come si farebbe oggi, si comincia per dividere divide per b_n che, essendo il più piccolo denominatore, darà luogo a una divisione più facile e si tiene da parte il resto. Si prosegue poi dividendo il risultato per i successivi denominatori, tenendo sempre da parte i resti, divisioni che risulteranno via via più difficili ma con dividendi via via più piccoli. I resti che avanzano da ogni divisione parziale danno luogo ai numeratori della frazione multipla. In questo modo basterà essere bravi nel dividere un numero per i singoli fattori.
Ecco, in dettaglio l'algoritmo **(V.44)**: si comincia col dividere a per il denominatore più piccolo cioè b_n. e si prosegue dividendo il risultato per b_{n-1} , b_{n-2} ecc fino a esaurimento dei fattori.

$a = a_n\ b_n + r_n$	con	$0 \leq r_n < b_n$
$a_n = a_{n-1}\ b_{n-1} + r_{n-1}$	con	$0 \leq r_{n-1} < b_{n-1}$
$a_{n-1} = a_{n-2}\ b_{n-2} + r_{n-}$	con	$0 \leq r_{n-2} < b_{n-2}$
$a_2 = a_1\ b_2 + r_2$	con	$0 \leq r_2 < b_2$
$a_1 = a_0\ b_1 + r_1$	con	$0 \leq r_1 < b_1$

E' facile verificare sostituendo i valori via via trovati che

$$\frac{a}{b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1} = \frac{r_n\ \ r_{n-1}\ \ \dots\ \ r_2\ \ \ r_1}{b_n\ \ b_{n-1}\ \ \dots\ \ b_2\ \ \ b_1}\ a_0$$

e quindi, essendo la frazione minore di uno, a_0 è il quoziente e $\frac{r_n\ \ r_{n-1}\ \ \dots\ \ r_2\ \ \ r_1}{b_n\ \ b_{n-1}\ \ \dots\ \ b_2\ \ \ b_1}$ il resto della divisione di a per $b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1$. L'algoritmo è molto interessante perché l'espressione del resto come frazione multipla ci da una indicazione approssimata di quanto sia questo resto: in prima approssimazione il resto più significativo sarà r_1 / b_1 il resto ciè risultante dall'ultima divisione.

Facciamo un esempio sulla lavagna: eseguiamo la divisione di 67898 per 1760. Poiché la *regola* di 1760, come dice Fibonacci, cioè una sua decomposizione in fattori fornisce 17600=2.8.10.11 per eseguire la divisione basta "infilzare i rotti" in 67898 cioè calcolare $\frac{67898}{2\times 8\times 10\times 11}$.

67898 : 2	fa 33949 : 8	fa 4243 : 10	fa 424 : 11 = 38
07	19	24	94
18	34	43	resto 6
09	29	resto 3	
18	resto 5		
resto 0			

$$\frac{67898}{17600}=\frac{0\ \ 5\ \ 3\ \ 6}{2\ \ 8\ \ 10\ \ 11}38$$

Abbiamo come risultato per la divisione

$$\frac{67898}{17600}=38+\frac{6}{11}+\frac{3}{110}+\frac{5}{880}$$

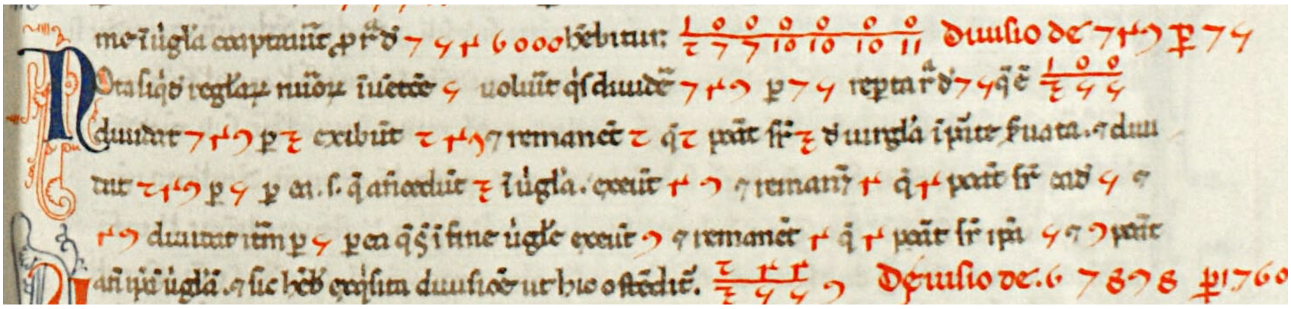
scrittura ha il vantaggio di dirci qualcosa di significativo sulla frazione iniziale e su sue possibili approssimazioni:

$$38+\frac{6}{11}<\frac{67898}{17600}<38+\frac{7}{11}$$

Se vogliamo trovare il resto della divisione precedente come frazione ordinaria si dovrà *traslatare i rotti*: il risultato è 6.160+3.16+10=1018 e quindi il risultato della divisione è 38 e 1018/17600 questo resto semplificando per 8 (con l'*evitatione* direbbe Fibonacci cioè evitando di fare una divisione con numeri più grandi quando tra divisore e dividendo c'è un fattore comune) diventa 127/2200 che è molto meno significativo del resto descritto con una frazione multipla.

Riportiamo un altro esempio leggendo direttamente dal manoscritto e dalla trascrizione successiva di Buoncompagni accompagnata dalla nostra traduzione letterale e, infine da una sua riduzione moderna. Ci renderemo conto dell'importanza e della difficoltà che

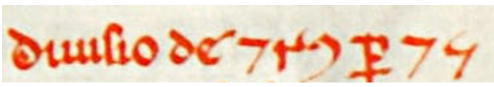
incontra un paleografo per decifrare un codice antico, con le parole spesso troncate, con abbreviazioni simboliche dal significato a volte dubbio, e non esente da errori di trascrittura da parte dell'amanuense che sovente non comprendeva il senso scientifico del testo.
Ecco il testo del paragrafo da decifrare (folio 18 recto) : divisione di 749 per 75.



Per decifrare questo codice cominciamo col prendere dimestichezza con i simboli per le 9 figure indiane con le quali si rappresentano i numeri che Fibonacci introduce nel primo capitolo:

Si vede intanto che il 2, il 3 e il 5 sono abbastanza dissimili dagli attuali simboli.

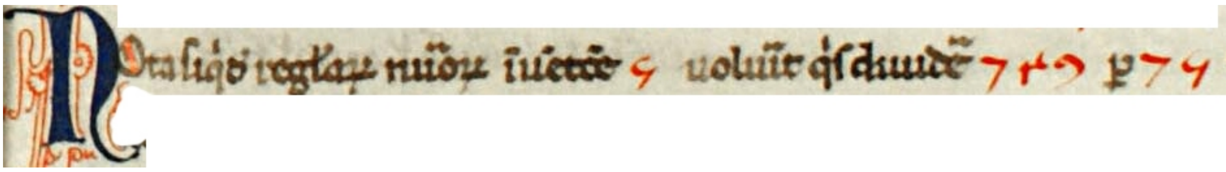
Il titolo del paragrafo si trova in alto a destra in rosso:



Devisio de 749 per 75

Divisione di 749 per 75

Cerchiamo di decifrare la prima riga servendoci della lettura che ne fece oncompagni nella sua edizione a stampa del Liber Abaci del 1857:



Nota siquidem regularum numerorum inventione 5 voluerit quis dividere 749 per75

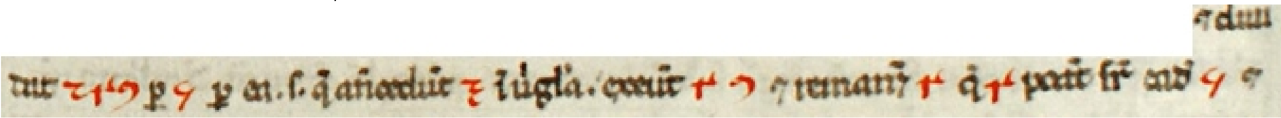
Poiché si sa come trovare le regole[2] dei numeri, qualcuno avrà voluto dividere 749 per 75,

reperta regula de 75, que est

trovata la regola di 75, che è $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 5\ \ 5}$

dividat 749 per 3 : exibunt 249 et remanent 2; que 2 ponat super 3 de virgula in parte servata.

si divida 749 per 3, farà 249, e resta 2; questo 2 si ponga sopra il 3 della linea di frazione conservata da parte



et dividat 249 per 5, per ea scilicet que antecedunt 3 in virgula: exeunt 49 et remanent 4; que 4 ponat super eadem 5,

e si divida 249 per 5, per quello cioè che antecede il 3 in frazione, farà 49 e resta 4; questo 4 si ponga sora lo stesso 5,

et 49 dividat iterum per 5, per ea que sunt in fine virgule: exeunt 9 et remanent 4; que 4 ponat super ipsa 5 et 9 ponat

si divida di nuovo 49 per 5, per quello che si trova alla fine della linea di frazione, fa 9 e rimane 4; questo 4 si ponga sopra lo stesso 5, e 9 si ponga

ante ipsam virgulam; et sic habebit ex quesita divisione ut hic ostenditur $\frac{2\ \ 4\ \ 4}{3\ \ 5\ \ 5}9$.

davanti alla medesima linea di frazione; e così di avrà dalla divisione richiesta , come qui si mostra, .$\frac{2\ \ 4\ \ 4}{3\ \ 5\ \ 5}9$

Ecco la nostra riduzione "moderna".

Poiché già sappiamo come si decompone un numero in prodotto di fattori primi, volendo dividere 749 per 75 decomponiamo 75: si ottiene 75=3x5x5 e quindi la sua frazione multipla è

2 Nella traduzione abbiamo omesso 5 nel testo che, anche consultando altri studiosi, ci è sembrato un errore.

$$\frac{1}{3\times5\times5}=\frac{1 \quad 0 \quad 0}{3 \quad 5 \quad 5}$$

Dividiamo 749 per 3 otteniamo: 749= 249 x 3 + 2. Scriviamo, nella frazione multipla 2 sopra il 3.

$$\frac{2 \quad 0 \quad 0}{3 \quad 5 \quad 5}$$

e dividiamo 249 per 5, per il numero cioè che segue il 3 sotto la linea di frazione: otteniamo

249= 49 x 5 + 4 e si scriva il 4 sopra il 5

$$\frac{2 \quad 4 \quad 0}{3 \quad 5 \quad 5}$$

si divida 49 ancora per 5, cioè per il numero che si trova alla fine della linea di frazione, otteniamo

49= 9 x 5 + 4 . Si scriva questo 4 sopra il 5 nella frazione multipla e il 9 accanto alla fine della linea di frazione

$$\frac{2 \quad 4 \quad 4}{3 \quad 5 \quad 5}\;9$$

In questo modo abbiamo eseguito la divisione richiesta ottenendo 9 col resto di $\frac{2 \quad 4 \quad 4}{3 \quad 5 \quad 5}$.

La scrittura di una frazione ordinaria come frazione multipla si può fare in tanti modi intanto non è necessario che il denominatore sia decomposto nel prodotto di più fattori perché si può sempre trasformare la frazione in un'altra moltiplicando per uno stesso numero numeratore e denominatore. Questo può essere molto utile se si voglia valutare una frazione col sistema sessagesimale nel quale l'unità è divisa in 60 primi, un primo in 60 secondi, un secondo in 60 terzi e cos' via. Si capisce che in questo modo l'approssimazione diventa molto fine. Facciamo un esempio: vogliamo valutare la frazione

$$\frac{5}{7}=\frac{5\times60\times60\times60}{7\times60\times60\times60}$$

e possiamo ora infilzare i rotti e troviamo

$$\frac{5}{7}=\frac{5\times60\times60\times60}{7\times60\times60\times60}=\frac{5 \quad 25 \quad 51 \quad 42}{7 \quad 60 \quad 60 \quad 60}$$

cioè cinque settimi è uguale a 42' più 51'' più 25''' più una parte residua più piccola di un milionesimo e mezzo dell'unità, uguale precisamente a 5/1512000.

Se invece di potenze di 60 eseguiamo lo stesso procedimento con potenze di 10, la stessa frazione si approssima

$$\frac{5000}{7000}=\frac{2 \quad 4 \quad 1 \quad 7}{7 \quad 10 \quad 10 \quad 10}=\frac{7}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{7000}$$

che corrisponde alla nostra scrittura decimale con la quale approssimiamo cinque settimi con le sue prime tre cifre decimali con 0,714.
L'introduzione del sistema metrico decimale, sconosciuto ai tempi di Fibonacci, permette di approssimare una frazione in modo semplice e diretto andando a calcolare quante si vogliano cifre decimali dopo la virgola, cosa che rende superfluo l'uso delle frazioni multiple per valutare il valore approssimato di una frazione e in definitiva l'uso stesso delle frazioni. Le operazioni con le frazioni si riducono a operazioni con i numeri "con la virgola". L'enorme semplificazione che il sistema metrico decimale comporta ha però un prezzo: la frazione fornisce nel calcolo un valore esatto mentre la sua rappresentazione decimale produce nella maggioranza dei casi degli sviluppi decimali infiniti che, a voler essere rigorosi, vanno trattati con i metodi delle serie infinite. Nella pratica dell'insegnamento dell'aritmetica su questo si sorvola, arrendendosi a una trattazione approssimata, ma, per la grande saggezza dei nostri padri, lo studio delle frazioni, molto semplificato rispetto a come veniva trattato da Fibonacci, non è stato cancellato del tutto dai nostri programmi della scuola primaria e secondaria. Sono sparite le frazioni multiple che proprio per la loro difficile definizione avrebbero potuto mettere in luce ancora di più il significato di parte di parti di frazione, concetto che troviamo ancora confuso nelle menti dei giovani che si iscrivono all'Università anche in corsi di laurea scientifici.