L'algoritmo di divisione in Fibonacci

Franco Ghione

Ricordiamo che, dati i due numeri interi positivi a e b, esistono due interi q e r (chiamati quoziente e resto della divisione di a per b) tali che:

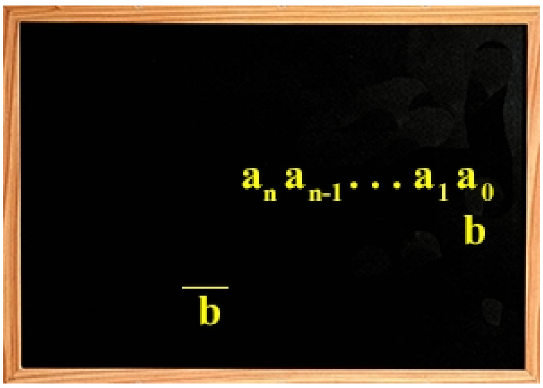
$$a = q\ b + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < b$$

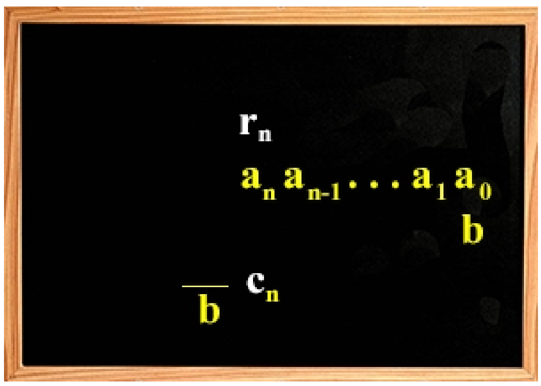
dove q è il numero di volte per le quali b entra in a cioè il più grande intero positivo o nullo tale che $a - q \times b \geq 0$ (q=0 se $a < b$) e r è il resto cioè $r = a - q \times b$. Nel caso che b sia un numero formato da una sola cifra e $a < 10\ b$ è molto facile servendosi delle tabelline calcolare a mente il quoziente e il resto ed è anche facile scrivere un programma che esegue la sottrazione di a per b, $2b$, $3b$ ecc. fino a quando $a - q \times b \geq 0$ e che quindi calcola quoziente e resto. Chiamiamo Q(a,b) = q e R(a,b) = r il quoziente e il resto della divisione di a per b. Possiamo ora trovare un algoritmo che esegue la divisione nel caso che a sia un numero qualunque, anche molto grande, partendo dalle divisioni elementari tabulate con le due funzioni Q e R.

Ecco cosa propone Fibonacci: sia

$$a = a_n\ 10^n + a_{n-1}\ 10^{n-1} + a_{n-2}\ 10^{n-2} + \ldots + a_1\ 10 + a_0$$

un numero intero e siano a_i le sue cifre decimali Si vuole dividere questo numero per un numero b formato da una sola cifra. Scriviamo su una tavola i numeri come nella figura a sinistra:





Si calcola c_n = Q(a_n, b) e r_n = R(a_n, b) e si scrive c_n sotto a_n in (n+1)-esima posizione dove si scriverà il risultato della divisione e r_n sopra a_n come si vede nella figura di destra. Se $c_n = 0$ e quindi $r_n = a_n$ non si scrive nulla e si passa al prossimo passo del processo ricorsivo a scendere cioè da n a n-1 a n-2 fino a 0 come ora specifichiamo.

A partire dai dati del problema e cioè dalle cifre decimali a_n, a_{n-1} , ... , a_1 , a_0 del numero *a* e da *b,* calcoliamo ricorsivamente a scendere i numeri A_n , A_{n-1} , A_{n-2} , ... , A_1 , A_0 e i resti r_n , r_{n-1} , r_{n-2} , ... , r_1 , r_0 attraverso le seguenti relazioni ricorsive:

$$A_n = a_n \ , \qquad r_n = R(A_n,b)$$

$$A_{n-1} = 10\, r_n + a_{n-1} \ , \qquad r_{n-1} = R(A_{n-1},b)$$

e in generale

$$A_k = 10\, r_{k+1} + a_k \ , \quad r_k = R(A_k,b)$$

$$k = n-1,\, n-2,\, \ldots ,\, 1, 0.$$

Dividiamo A_k per *b*:

$$A_k = Q(A_k\ ,\ b)\, b + r_k$$

poiché $0 \leq r_{k+1} \leq b-1$ e $0 \leq a_k < 10$ risulta $A_k = 10\, r_{k+1} + a_k < 10(b-1)+10 = 10\, b$ e quindi *b* entra in A_k meno di 10 volte e, di conseguenza $Q(A_k\ ,\ b)$ è una cifra: saranno queste le cifre del quoziente che stiamo cercando. Poniamo $c_k = Q(A_k\ ,\ b)$ e

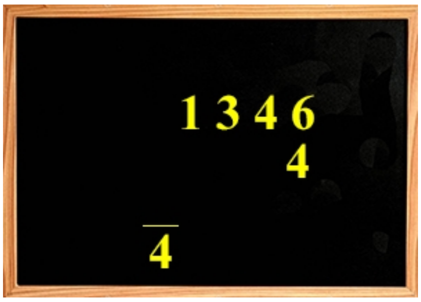
$$A_k = c_k\ b + r_k,$$

Seguendo le indicazioni di scrittura di Fibonacci, scriviamo c_k sotto a_k nella corrispondente posizione (k+1)-esima, dove si scriverà il risultato della divisione, e r_k sopra a_k.

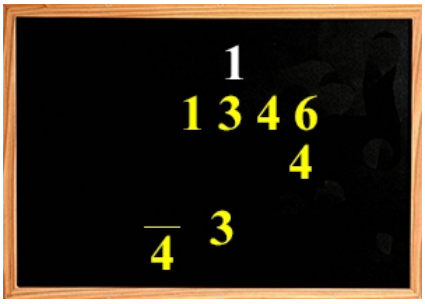
Se $c_n = 0$ allora $r_n = a_n$ non si scrive nulla e si passa direttamente al passo successivo: $A_{n-1} = a_n + a_{n-1}10$, e si divide per *b* questo numero:

$$a_n + a_{n-1}10 = c_{n-1}\ b + r_{n-1}$$

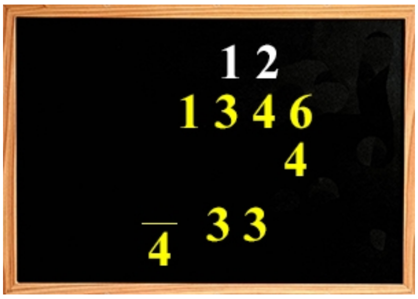
cioè $r_{n-1} = R(A_{n-1},b)$ e $c_{n-1} = Q(A_{a-1}\ ,\ b)$. Scriviamo r_{n-1} sopra a_{n-1} e c_{n-1} sotto a_{n-1} come fatto nell'esempio seguente dove abbiamo diviso 1346 per 4 **(V.11)** . Si prosegue poi nello stesso modo con $r_k = R(A_k,b)$ e $c_k = Q(A_k\ ,\ b)$



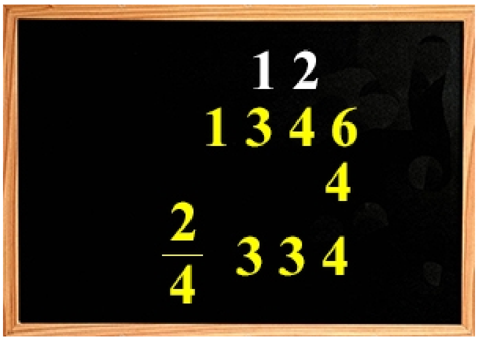
Si dispongono i numeri sulla tavola
1 : 4=0 resto 4 (o non si scrive)



13 : 4 = 3 e resta 1
Si scrive il 3 in terza posizione e 1 sopra



14 : 4 = 3 e resta 2
Si scrive 3 in seconda posizione



26 : 4= 4 e resta 2
Si scrive 4 in prima posizione

L'ultimo resto si scrive come numeratore della frazione scritta in margine a sinistra. In fondo si legge il risultato. Un misto di scrittura araba (da destra a sinistra) e latina da sinistra a destra porta a scrivere il numero alla araba $\frac{1}{2}\,334$ che si legge 334 e un mezzo.

Per verificare che il numero $q = c_n\ 10^n + c_{n-1}\ 10^{n-1} + c_{n-2}\ 10^{n-2b} + ... + c_1\ 10 + c_0$ è il quoziente della divisione di a per b con resto r_0 , basta fare il calcolo di seguito riportato:

$a = a_n\ 10^n + a_{n-1}\ 10^{n-1} + a_{n-2}\ 10^{n-2} + ... + a_1\ 10 + a_0 =$

ma, dalle formule ricorsive abbiamo $A_n = a_n$ e, per $k < n$, $A_k = 10\ r_{k+1} + a_k$. Sostituendo

$= A_n\ 10^n + (A_{n-1} - 10\ r_n)\ 10^{n-1} + (A_{n-2} - 10\ r_{n-1})\ 10^{n-2} + ... + (A_1 - 10\ r_2)\ 10 + (A_0 - 10\ r_1) =$

poiché $A_k = c_k\ b + r_k$ abbiamo

$= (c_n\ b + r_n)10^n + (c_{n-1}\ b + r_{n-1} - 10\ r_n)\ 10^{n-1} + ... + (c_1\ b + r_1 - 10\ r_2)\ 10 + (c_0\ b + r_0 - 10\ r_1) =$

$= (c_n\ 10^n + c_{n-1}\ 10^{n-1} + c_{n-2}\ 10^{n-2b} + \ldots + c_1\ 10 + c_0\ )\ \ b + r_0 = q\ \ b + r_0$ con $0 \leq r_0 < b$.

L'algoritmo non cambia se il divisore b ha un numero maggiore di cifre, perché tutte le relazioni precedenti continuano a valere qualunque sia l'intero b. L'unica differenza consiste nel fatto che il calcolo della divisione di un numero A per b deve essere fatto a priori per tutti i numeri A che hanno una cifra in più rispetto a b perché dobbiamo sapere eseguire le divisioni di numeri minori o uguali di 10 b. Sapendo eseguire queste divisioni più semplici, cioè, sapendo calcolare le funzioni Q(A,b) e R(A,b) per ogni numero A minore di 10b, con l'algoritmo precedente possiamo calcolare ricorsivamente Q(X,b) e R(X,b) per qualsiasi numero X comunque grande.

Vi è in questa procedura una possibile confusione nel modo di scrivere i resti man mano che procede la divisione dato che i resti hanno in generale più cifre decimali che vanno scritte nelle posizioni che gli corrispondono. Per rendere l'algoritmo univoco, si scrivono a ogni passo i resti e i quozienti nelle loro posizioni cancellando, per evitare confusioni, ad ogni passo, con un tratto di penna, il resto precedente.

Facciamo un esempio: dividiamo 235798 per 13

2 3 5 7 9 8 1 3 $\frac{\quad}{13}$	2 2 3 5 7 9 8 1 3 $\frac{\quad}{13}$ 0	1 ~~2~~0 2 3 5 7 9 8 1 3 0 1 $\frac{\quad}{13}$	~~1~~ ~~20~~1 2 3 5 7 9 8 1 3 0 1 8 $\frac{\quad}{13}$
2:13 = 0 con resto 2. Scriviamo 2 sopra e 0 sotto per il risultato	23:13=1 con resto 10. Cancelliamo il 2, scriviamo 1 sotto e 10 tra i resti	105:13=8 resto 1 Cancelliamo il 10 scriviamo 8 sotto e 1 tra i resti	17:13=1 resto 4 Cancelliamo 1, scriviamo 1 sotto e 4 tra i resti
~~1~~ ~~201~~4 2 3 5 7 9 8 1 3 0 1 8 1 $\frac{\quad}{13}$	~~1~~ 1 ~~2014~~0 2 3 5 7 9 8 1 3 0 1 8 1 3 $\frac{\quad}{13}$	~~1~~ ~~1~~ ~~20140~~4 2 3 5 7 9 8 1 3 $\frac{4}{13}$ 0 1 8 1 3 8	2 3 5 7 9 8 diviso 1 3 fa $\frac{4}{13}$ 1 8 1 3 8
49:13=3 resto 10 Cancelliamo 4, scriviamo 3 sotto e 10 tra i resti	108:13=8 resto 4 Cancelliamo 10, scriviamo 8 sotto e 4 tra i resti	La divisione è terminata	il risultato è 18138 e 4 tredicesimi

Questo algoritmo è essenzialmente uguale al nostro, cambia solo il modo di disporre i numeri e il calcolo dei resti che in Fibonacci è fatto a mente. L'impostazione della divisione cambia radicalmente se il divisore è un numero composto dal prodotto di più numeri. In questo caso Fibonacci riduce il problema alla divisione per i singoli fattori descrivendo un algoritmo molto interessante che coinvolge le frazioni multiple trattate in una scheda a parte. Per questo Fibonacci dedica molto spazio alla decomposizione di un numero in fattori primi decomposizione che lui chiama *la regola del numero*, e alle divisioni nel caso che il divisore sia un numero primo (cioè un numero senza regola) . Se il numero primo p è minore di 100, fornisce delle interessanti indicazioni su come trovare le funzioni $Q(a,p)$ e $R(a,p)$ nel caso in cui $a < 10p$ che potrebbero essere interessanti per compilare un programma che esegue queste divisioni. Si tratta di trovare quante volte p entra in $a = a_0 + a_1\ 10 + a_2\ 10^2$ e per questo approssima p con la decina p' più vicina a p e guarda quante volte p' entra $a_0 + a_1\ 10$ cosa che riporta ancora alla sola tavola pitagorica. Infine se q è il quoziente di $a_0 + a_1\ 10$ per p' calcolato appunto a mente, allora il quoziente di
$a = a_0 + a_1\ 10 + a_2\ 10^2$ per p è uguale a q o $q+1$ se $p < p'$ mentre è uguale a $q-1$ o q se $p > p'$. **(V.34)**.