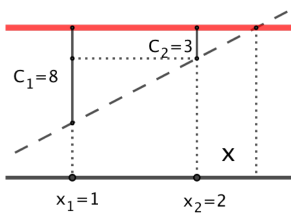
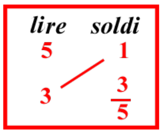
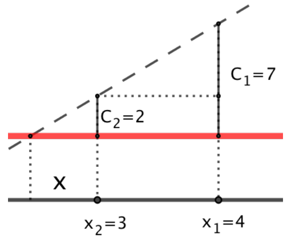
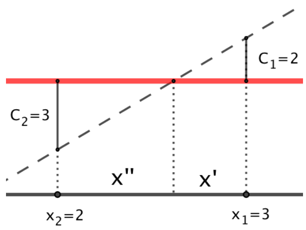
Liber abbaci

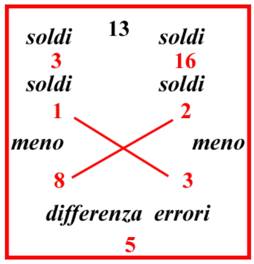
CAPITOLO TREDICI

Comincia il capitolo 13 sul metodo di elchataym con cui si risolvono quasi tutti i problemi dell'abaco

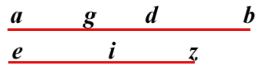
pg. 318	**(XIII.1.1)** Certamente l'arabo *elchataym* significa in latino metodo di doppia falsa posizione, con il quale si trova la soluzione di quasi tutti i problemi; uno di questi è quello grazie al quale nella terza parte del dodicesimo capitolo abbiamo insegnato a risolvere le regole degli alberi e cose similari. In queste non occorre porre l'intero elchataym, cioè le due posizioni, poiché è possibile risolvere quei problemi con una sola di esse: e tuttavia vogliamo mostrare come questo e molti altri problemi si debbano risolvere grazie all'*elchataym*. Siano infatti poste a caso due false posizioni. Da qui discendono invero ora le due minori, ora le due maggiori, ora una maggiore, ora l'altra minore: e si trova la soluzione giusta in base alla proporzione della differenza di una posizione rispetto all'altra, cosa che accade nella regola del quarto proporzionale, nella quale tre numeri sono noti; attraverso questi si trova il quarto numero sconosciuto, cioè la soluzione giusta; il primo numero è la differenza di un numero in falsa posizione rispetto all'altro. Il secondo è l'approssimazione al vero valore che si fa con la differenza stessa. Il terzo è il resto che è l'approssimazione del vero valore. E, comunque siano, vogliamo dimostrarlo prima con il metodo del cantare, affinché, una volta dimostrate con esattezza le tre differenze nel cantare, tu possa comprendere sempre con esattezza attraverso l'*elchatavm* gli altri problemi.	
	(XIII.1.2) Valga dunque un cantare, cioè 100 Rotoli, 13 lire[1]; e si chieda quanto valga 1 Rotolo: poniamo a caso che un Rotolo valga 1 soldo; quindi 100 Rotoli, cioè un cantare, varranno per tale ragione 100 soldi, cioè 5 lire: orbene, poiché il prezzo del cantare è 13 lire, allora questa prima posizione è falsa; e dista dal vero valore 8 lire, cioè la differenza che intercorre da 5 lire a 13 lire. Di conseguenza per il prezzo del Rotolo stesso poniamo 2 soldi, cioè 1 soldo, più della prima posizione, per cui il cantare varrà 200 soldi, cioè 10 lire; e similmente questa posizione è falsa e lontana 3 lire dal vero valore, cioè la differenza che intercorre da 10 lire a 13 lire. Infatti nella prima posizione si è stati lontani dal vero di 8 lire, nella seconda di 3 lire. Quindi per la differenza che c'è dalla prima posizione alla seconda, cioè di 1 soldo, ci saremmo approssimati al vero di 5 lire, cioè la differenza che c'è da 8 lire a 3 lire; e mancano ancora per approssimarci 3 lire. Perciò dirai: per 12 denari che aggiunsi al	I posizione x_1=1 soldo, c_1=8 lire in meno II posizione x_2=2 soldi , c_2 = 3 lire in meno  x_2-x_1 : c_1-c_2 = x : c_2

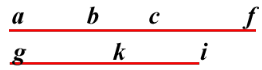
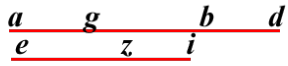
[1] Ricordiamo che la lira era divisa in 20 soldi e un soldo in 12 denari

	prezzo di un Rotolo, mi sono approssimato al prezzo del cantare di 5 lire; cosa debbo aggiungere quindi al prezzo dello stesso Rotolo, per approssimarmi alle 3 lire che mancano in seconda posizione dal prezzo dello stesso cantare: moltiplica dunque i numeri estremi e dividerai per il medio, secondo quello che si è dimostrato nel metodo degli alberi e cose similari, cioè 12 per 3; e dividerai per 5, che è il numero medio, faranno 1/5 7 denari; aggiunti questi ai 2 soldi che furono posti in seconda posizione, avrai come prezzo di un Rotolo 2 soldi e 1/5 7 denari: infatti queste due posizioni sono risultate minori del vero valore.	
pg. 319	**(XIII.1.3)** Ora poniamo che siamo ambedue maggiori: si ponga dunque a caso che 1 Rotolo valga 4 soldi; perciò il cantare intero varrà 20 lire, cioè 7 lire in più di quanto debba: quindi questa posizione è falsa: si ponga quindi in seconda posizione 3 soldi come prezzo di quel Rotolo, cioè 12 denari in meno della prima posizione; perciò tutto il cantare varrebbe 15 lire, cioè 2 lire in più di quanto debba. E dunque anche questa posizione è ugualmente falsa. Infatti per i 12 denari che si sono diminuiti in seconda posizione del prezzo di un Rotolo si è approssimato di 5 lire, cioè la differenza che intercorre da 7 lire a 2, restano 2 lire da doversi ora approssimare. Perciò dirai: per 12 denari che ho sottratto dal prezzo del Rotolo, mi sono approssimato al vero valore di 5 lire; che cosa dovrei sottrarre dalla seconda posizione per approssimarmi di 2 lire: moltiplica quindi gli estremi, cioè 12, per 2, e dividi per il medio, cioè per 5, faranno 4/5 4 denari; sottratti questi dai 3 soldi in seconda posizione, resteranno similmente come prezzo di quel Rotolo 2 soldi e 1/5 7 denari.	I posizione x_1=4 soldi, c_1 = 7 lire in più II posizione x_2=3 soldi, c_2 = 2 lire in più  x_1-x_2 : c_1-c_2 = x : c_2
	(XIII.1.4) Ancora: affinché una posizione sia la maggiore, e l'altra la minore, poniamo come prezzo di quel Rotolo 3 soldi; perciò il cantare varrebbe 15 lire, cioè 2 lire in più di quanto debba: e poniamo in seconda posizione come prezzo del Rotolo 2 soldi; per cui il cantare varrebbe 10 lire, cioè è 3 in meno del dovuto: quindi per i 12 denari che diminuimmo nella seconda posizione diminuiamo 2 lire, che sono in eccesso nella prima posizione, e 3 lire che sono in diminuzione nella seconda posizione: quindi per questi 12 denari si sono diminuite 5 lire nel passaggio dalla prima posizione alla seconda, perciò non resterebbero da diminuire se non 2 lire; oppure si è accresciuto 5 lire dalla seconda posizione alla prima, non restando da crescere se non 3 lire; perciò puoi imparare in due modi: per prima cosa potresti dire: per i 12 denari che si sono diminuiti dalla prima posizione, si sono diminuite 5 lire; cosa dovremmo diminuire dalla stessa per diminuire solo 2 lire: moltiplica 12 per 2, e dividi per 5, farà 4/5 4 denari; sottratti questi dai 3 soldi della prima posizione restano 2 soldi e 1/5 7 denari come prezzo di quel Rotolo. Oppure potresti dire: per i 12 denari che ho portato in accrescimento dalla seconda posizione alla prima, ho accresciuto 5 lire; cosa aggiungerò alla stessa seconda posizione, per aumentare di 3 lire: moltiplica dunque 12 per 3, e dividi per 5, risulteranno 1/5 7 denari; sommati questi con i soldi della seconda	I posizione x_1=3 soldi, c_1 = 2 lire in più II posizione x_2=2 soldi, c_2 = 3 lire in meno  x_1-x_2 : c_1+c_2 = x' : c_1 x_1-x_2 : c_1+c_2 = x'' : c_2

	posizione, avrai similmente come prezzo di quel Rotolo 2 soldi e 1/5 7 denari.	
	(XIII.1.5) C'è infatti un altro modo *elchataym*, che si chiama regola dell'aumento e della diminuzione, nel quale si mettono gli errori sotto la loro posizione; il primo errore si moltiplica per la seconda posizione e il secondo errore per la prima posizione. E qualora gli errori siano stati entrambi sottratti o entrambi aggiunti, si sottrae il risultato minore delle predette moltiplicazioni dal maggiore e il resto si divida per la differenza degli errori, e così si trova la soluzione del problema. E se un errore sia stato aggiunto e l'altro diminuito, allora si sommano insieme ambedue le moltiplicazioni e si divide il risultato per la somma degli errori.	
	(XIII.1.6) Per esempio: ponemmo prima per il prezzo di 1 Rotolo 1 soldo, con ciò si è errato di 8 lire in meno; perciò porrai 8 sotto l'1 e annoterai il meno sopra l'8, essendo in meno. Poi, poiché nella seconda posizione ponemmo 2 soldi come prezzo dello stesso Rotolo e sbagliammo ancora in tre lire in meno, poni 2 soldi davanti la prima posizione e sotto essi poni il loro errore, cioè 3 lire, sopra le quali annoterai di nuovo il meno essendone di nuovo prive. E moltiplicherai 2 soldi per il numero del primo errore, saranno 16 soldi; e 1 soldo per il numero dei soldi del secondo: saranno 3 soldi. E poiché ambedue gli errori furono in meno, sottrai la moltiplicazione minore dalla maggiore, cioè 3 da 16: resteranno 13 soldi, divisi i quali per la differenza degli errori, cioè per 5, risultano 3/5 2 soldi come abbiamo trovato prima.	 $x = \frac{x_2 c_1 - x_1 c_2}{c_1 - c_2}$
pg. 220	**(XIII.1.7)** Inoltre quando prima facemmo provenire due errori entrambi sovrabbondanti, ponemmo in prima posizione 4 soldi e sbagliammo con 7 lire aggiunte, e ponemmo 3 soldi in seconda posizione e sbagliammo ancora con 2 lire aggiunte, come appare chiaro in quest'altra tavola. Perciò moltiplicherai la seconda posizione per il numero del primo errore, cioè per 3: faranno 21 soldi; e 2 e per 4; faranno 8 soldi; e poiché entrambi gli errori furono in eccesso, dividi la differenza delle moltiplicazioni per la differenza degli errori, cioè 13 per 5, e avrai similmente 3/5 2[2]	 $x = \frac{x_2 c_1 - x_1 c_2}{c_2 - c_1}$
	(XIII.1.8) Ancora quando facemmo la diminuzione in prima [posizione] e l'aumento nell'altro, ponemmo come prezzo del Rotolo in prima posizione 2 soldi e nella seconda 3 soldi, e il primo errore fu 3 diminuito e il secondo 2 aggiunto, come si vede in quest'altra tavola. Perciò moltiplicherai 3 per 3 e 2 per 2: farà 9 soldi e 4 soldi, sommali assieme, essendo uno degli errori diminuito e l'altro aggiunto; saranno 13 soldi, dividili per l'unione tra gli errori, cioè per 5: farà similmente 3/5 2 soldi, cioè 2 soldi e 1/5 7 denari,	

[2] 3/7 nel testo è un chiaro errore.

	come trovammo più sopra.	$x = \frac{x_2c_1 + x_1c_2}{c_2 + c_1}$
	(XIII.1.9) E allora perché si dimostri da dove provenga ciò, si trovi il numero ignoto *.a.b.* cioè la vera soluzione di un qualche problema che si possa risolvere con *elchataym*; da questo numero si prenda il numero *.a.g.* noto come prima posizione, il cui errore sia il numero *.e.z.* più piccolo, e come seconda posizione si assuma di nuovo dal numero *.a.b.* il numero *.a.d.* similmente annotato, il cui errore sia il numero *.i.z.* similmente più piccolo, e si annoti ciascuno dei numeri *.e.z., .i.z.* . Perciò è nota la differenza che c'è tra entrambi gli errori, cioè il numero *.e.i.* è noto. Similmente il numero *.g.d.*, il numero che è tra entrambe le posizioni, è noto, essendo noti i numeri delle posizioni, cioè *.a.g.* e *.a.d.*; ma il numero *.b.d.* resta ignoto, essendo ignoto tutto *.a.b.*. E così occorre, se il problema sarà stato solubile con l'*elchataym*, che come *.e.i.* noto sta a *.i.z.* noto così *.g.d.* noto sta a *.d.b.* ignoto. Perciò secondo il primo modo si è moltiplicato *.i.z.* per *.g.d.* e diviso per *.e.i.*, cioè si è moltiplicato il secondo errore per la differenza delle posizioni e diviso il totale per la differenza degli errori, e avemmo il numero noto *.d.b.*, che si è aggiunto alla seconda posizione, cioè ad *.a.d.* e così avemmo il numero noto *.a.b.* cioè la soluzione del problema posto.	Dimostra il secondo modo nel caso $x_1 < x_2$ e $c_1 > c_2$  Il problema è solubile con *elchataym* se e solo se: $(c_1 - c_2) : c_2 = (x_2 - x_1) : (x - x_2)$
	(XIII.1.10) Ma nel secondo altro modo si è moltiplicato prima l'errore per la seconda posizione, cioè *.e.z.* per *.a.d.*, e sottratto il prodotto del secondo errore per la prima posizione, cioè del numero *.i.z.* per il numero *.a.g.*, e diviso il resto per il numero *.e.i.*, e si è avuto in totale il numero *.a.b.*; e ciò succede perché moltiplicando il numero *.e.z.* per il numero *.a.d.*, allora si moltiplicano i numeri *.e.i.* e *.i.z.* per il numero *.a.d.*: ma moltiplicando il numero *.i.z.* per il numero *.a.d.*, si moltiplica il numero *.i.z.* per i numeri *.a.g.* e *.g.d.*: quindi moltiplicando il numero *.e.z.* per il numero *.a.d.*, si moltiplica il numero *.e.i.* per il numero *.a.d.* e il numero *.i.z.* per i numeri *.a.g.* e *.g.d.*. Ma la moltiplicazione *.i.z.* per *.g.d.* è come la moltiplicazione di *.e.i.* per *.d.b.*, poiché come *.e.i.* sta a *.i.z.* così *.g.d.* sta a *.d.b.*. Perciò moltiplicando *.e.z* per *.a.d.*, si [trova il numero ottenuto moltiplicando] *.e.i.* per i numeri *.a.d.* e *.d.b.*, che è in totale il numero *.a.b.*, più il numero *.i.z.* per il numero *.a.g.*. Da cui se dalla moltiplicazione dei numeri *.e.z* per *.a.d.*, cioè del primo errore [per la] seconda posizione, sia tolta la moltiplicazione del numero *.i.z.* per il numero *.a.g.*, cioè il secondo errore [per la] prima posizione, resta la moltiplicazione del numero *.e.i.* per il numero *.a.b.*; si divida questa moltiplicazione per lo stesso *.e.i.,* cioè per la differenza degli errori, è necessario appunto che si presenti il numero *.a.b.*; che era opportuno mostrare.	Dimostra che: $x_2 + \frac{x_2 - x_1}{c_1 - c_2} c_2 = \frac{x_2c_1 - x_1c_2}{c_1 - c_2}$

pg. 321	**(XIII.1.11)** Oppure il numero *.a.b.* ignoto sia la vera soluzione di alcuni problemi che si possono risolvere con l'*elchataym*, e sia il numero *.a.f.* la prima posizione e il numero *.a.c.* la seconda; e entrambe le posizioni siano maggiori del numero *.a.b.*, perciò saranno sommati ai loro errori; e il numero *.g.i.* sia l'errore della prima posizione e *.g.k.* della seconda. E così occorre che come *.i.k.* sta a *.k.g.* così *.c.f.* noto sta a *.c.b.* ignoto. Perciò più sopra si è moltiplicato nel primo modo *.k.g.*, cioè il secondo errore, per *.c.f.*, cioè per la differenza delle posizioni, e diviso il totale per il numero *.i.k.* cioè per la differenza degli errori, e si è avuto il numero *.b.c*; che si è sottratto da *.a.c.*, cioè dalla seconda posizione, e resta il numero *.a.b.*. Ma nel secondo altro modo si è moltiplicato il numero *.g.i.* per il numero *.a.c.*, cioè il primo errore per la seconda posizione, e sottratto di lì la moltiplicazione del numero *.k.g.* per il numero *.a.f.*, cioè del secondo errore per la prima posizione, e ciò che rimane lo si è diviso per il numero *.i.k.*, cioè per la differenza degli errori, e si è avuto similmente il numero *.a.b.* che era ignoto; e ciò perché [si trova il numero] *.g.i.* moltiplicato per il numero *.a.c.,* cioè il primo errore per la seconda posizione, allora si moltiplicano i numeri *.g.k.* e *.k.i.* per il numero *.a.c.*. Ma moltiplicando il numero *.k.i.* per il numero *.a.c.,* allora si moltiplica il numero *.k.i.* per il numeri *.a.b.* e *.b.c.*. infatti la moltiplicazione di *.k.i.* per *.b.c.* è uguale alla moltiplicazione di *.g.k.* per *.c.f.*, essendo che come *.i.k.* sta a *.k.g.* così *.f.c.* sta a *.c.b.*; quindi [il numero ottenuto] moltiplicando il numero *.g.i.* per il numero *.a.c.*, allora si ottiene moltiplicando il numero *.g.k.* per i numeri *.a.c.* e *.c.f.,* cioè in totale [per] il numero *.a.f.* e il numero *.k.i.* per il numero .a.b.. Perciò se dal prodotto di *.g.i.* e di *.a.c.*, cioè del primo errore [per la] seconda posizione, si tolga la moltiplicazione *.g.k.* per *.a.f.*, cioè del secondo errore [per la] prima posizione, allora rimarrà la moltiplicazione del numero *.k.i.* per il numero *.a.b.*; e dividendo questa moltiplicazione per *.k.i.,* cioè per la differenza degli errori, ne viene il numero *.a.b.,* cioè la soluzione dei problemi, e questo ho voluto mostrare.	Ora abbiamo $x_1 > x_2$ e $c_1 > c_2$  Il problema è solubile con *elchataym* se e solo se: $(c_1 - c_2) : c_2 = (x_1 - x_2) : (x_2 - x)$ Dimostra che: $x_2 - \frac{x_1 - x_2}{c_1 - c_2} c_2 = \frac{x_2 c_1 - x_1 c_2}{c_1 - c_2}$
	(XIII.1.12) Di nuovo sia vicino il numero *.a.b.* ignoto, che sia la soluzione di qualche problema che si possa risolvere con l'*elchataym*, e da esso si prenda il numero *.a.g.* noto come prima posizione, il cui errore sia *.e.z.* mancante, e come seconda posizione si abbia il numero *.a.d.* noto, che è maggiore del numero *.a.b.,* il cui errore sia il numero *.z.i.*. E così occorre, se il problema potrà essere risolto con l'*elchataym*, che come *.g.d.* sta a *.b.g.* così *.e.i.* stia a *.e.z.*, cioè che la differenza che c'è tra le posizioni stia alla differenza che c'è tra prima posizione e il numero cercato, come l'unione degli errori sta al primo errore. E poiché è stato cosi, prima, quando ci si è occupati del il primo modo, si è moltiplicato il primo errore per la differenza delle posizioni, cioè *.e.z.* per *.g.d.*, e diviso il totale per la somma degli errori, cioè per il numero *.e.i.*, e si è avuto il numero *.g.b.;* che si è aggiunto alla prima posizione, cioè a *.a.g.*, e si trovò il numero *.a.b.*, che era ignoto.	Ora abbbiamo $x_1 < x_2$ e gli errori siano di segno diverso  Il problema è solubile con *elchataym* se e solo se: $(c_1 + c_2) : c_2 = (x_2 - x_1) : (x - x_1)$

pg. 322	**(XIII.1.13)** E poiché *.g.d.* stette a *.b.d.* come *.e.i.* a *.z.i.*, perciò si è moltiplicato *.z.i.* per *.g.d.*, cioè il secondo errore per la differenza delle posizioni, e diviso il totale per il numero *.e.i.*, cioè per l'unione degli errori, e si è avuto il numero *.b.d.*, che si è sottratto dal numero *.a.d.*, cioè dalla seconda posizione, ed è risultato il numero *.a.b.*, cioè la soluzione. In verità per il secondo modo si è moltiplicato il primo errore per la seconda posizione, cioè *.e.z.* per *.a.d.*, e il secondo errore per la prima posizione, cioè *.z.i.* per *.a.g.*; si sono riunite queste moltiplicazioni e diviso il loro totale per l'unione degli errori, cioè per *.e.i.*, e si è avuta la soluzione cercata, cioè il numero *.a.b.*; e ciò perché quando si moltiplica il numero *.e.z.* per il numero *.a.d.*, allora si moltiplichi *.e.z.* per i numeri *.a.g.* e *.g.d.*; sommando a queste moltiplicazioni la moltiplicazione di *.z.i.* per *.a.g.* , allora si avrà il totale delle moltiplicazioni dei numeri *.e.z.*, *.z.i.* per il numero *.a.g.*, e del prodotto di *.e.z.* per *.g.d.* . Ma le moltiplicazioni di *.e.z.* per *.a.g.* e *.z.i.* per *.a.g.* sono uguali al prodotto di tutto *.e.i.* per il numero *.a.g.* ; moltiplicando *.e.z.* per *.a.d.* e *.z.i.* per *.a.g.*, allora si moltiplica *.e.i.* per *.a.g.* e *.e.z.* per *.g.d.* . Ma la moltiplicazione di *.e.z.* per *.g.d.* è come la moltiplicazione di *.e.i.* per *.g.b.*, perché come *.i.e.* sta a *.z.e.* così *.d.g.* sta a *.b.g.* . da cui moltiplicando *e.z.* per *.a.d.* e *.z.i.* per *.a.g.* , allora si moltiplica *.e.i.* per i numeri *.a.g.* e *.g.b.* , cioè il numero *.a.b.* in totale: quindi moltiplicando *e.z.* per *.a.d.* , cioè il primo errore per la seconda posizione, e *.z.i.* per *.a.g.* , cioè il secondo errore per la prima posizione, allora l'unione delle stesse moltiplicazioni è uguale[3] al prodotto del numero *.e.i.* per il numero *.a.b.* . perciò dividendo il loro totale per *.e.i.*, che è l'unione degli errori, esce il numero *.a.b.* ; che era opportuno mostrare.	Dimostra che: $x_1+\frac{x_2-x_1}{c_1+c_2}c_1=x_2-\frac{x_2-x_1}{c_1+c_2}c_1=$ $=\frac{x_2c_1+x_1c_2}{c_1+c_2}$
	(XIII.1.14) E così spiegati questi, resta da dimostrare in quale posizione debbano essere posti e come debbano essere trovati i loro errori secondo la diversità dei problemi. E per dimostrarlo in maniera più chiara, ho diviso questo capitolo in due parti. Nella prima di esse mostrerò come risolvere con il primo metodo qualcuno dei problemi che sono stati risolti nei capitoli precedenti. Nella seconda si tratterà della soluzione di alcuni altri problemi, dei quali non ci fu nessuna menzione in questo libro.	

[3] *Quator* nel testo viene corretto in Giusti