



Liber abaci

CAPITOLUM DUODECIMUM

pars I

pars II

pars III

pars IV

pars V

pars VI

pars VII

pars VIII

pars IX

PARS NONA

XII.9.1

Incipit pars 9^a de duplicatione scacherii, et quorundam aliarum regularum.

Duplicatio quidem scacherij dupli modo proponitur; quorum unus est cum sequens punctum sui antecedentis duplum sit; alias, cum sequens punctum omnium antecedentium puncorum duplum esse proponatur. Vnde qualiter utrum duplicatio fieri debeat, ad presens ostendere procuramus. Prima namque duplicatio dupli modo fieri potest, uidelicet si de puncto in punctum duplicando usque ad ultimum punctum egrediendo operabimur: alias modus est, ut duplices tantum primum punctum, et habebis duo; que duo multiplica in se, erunt 4; que 4 sunt 1, magis numero duplicationis duorum puncorum. Verbi gratia. In primo puncto pone 1. In secundo 2; quibus iunctis, faciunt 3; quibus tribus suprascripta 4 sunt 1 plus; quibus 4 in se multiplicatis, faciunt 16; qui numerus est uno magis duplicatione dupli duorum puncorum, uidelicet de punctis 4. Verbi gratia: in primo est 1. In secundo 2. In tercio 4. In quarto 8; quibus insimul iunctis, faciunt 15; que sunt 1, minus de 16. Item 16 in se multiplica, faciunt 256; que sunt 1, plus numero duplicationis dupli punctorum suprascriptorum, scilicet de punctis 8; que primam scacherij optinent lineam. Verbi gratia. In primo est 1. In secundo 2. In tercio 4. In quarto 8. In quinto 16. In sexto 32. In septimo 64. In octavo 128; quibus insimul iunctis, faciunt 255; quorum 255 suprascripta 256 sunt, 1 plus, ut prediximus: quare multiplicatis 256 in se, faciunt 65536, que sunt 1, magis duplicatione dupli unius linee, scilicet de punctis 16: propter eamdem ergo multiplica 65536 in se, faciunt 4294967296; que similiter sunt uno magis numero duplicationis dupli duarum linearum, uidelicet de punctis 32, que dimidium optinent scacherij. Vnde multiplica 4294967296 in se, reddunt 18446744073709551616; que sunt 1, magis duplicatione totius scacherij; quo numero in se ipso multiplicato, reddunt 1, magis duplicatione duorum scacheriorum, scilicet 340282366920938463483374607431768211456; et sic multiplicando possemus procedere in infinitum.

XII.9.2

Sed cum numerus duplicationis scacherij post multitudinem intelligi nequeat; qualiter apertius intelligi possit, ostendere procuramus. Suntur bizantij 65536, qui colliguntur ex duplicatione duarum linearum, scilicet 16 punctorum; et impletatur ex his arca una; et eas cum ipsa arca duplicando per ordinem; et sic habebimus in septimo decimo punto, uidelicet in primo punto tercie linee, archas duas; secundo eiusdem linee arcas 4. In tertio 8. In quarto 16. In quinto 32. In sexto 64. In septimo 128. In ultimo eiusdem linee 256. In primo quarte linee 512. In secundo 1024. In tertio 2048. In quarto 4096. In quinto 8192. In sexto 16384. In septimo 32768. In ultimo habebis arcas 65536: ex quibus, si unam impleuerimus domum, habebimus in primo punto quinte linee domos 2. In secundo 4. In tertio 8; et sic duplicando per ordinem, habebimus in ultimo punto sexte linee domos 65536. Ex quibus, si unam fecerimus ciuitatem, et per reliqua puncta iuerimus duplicando, habebimus in ultimo punto scacherij ciuitates 65536: ergo summa totius scacherij ascendit in ciuitates 65536; ex quibus unaquaque habet domos 65536; et in unaquaque domo sunt arce 65536; et in unaquaque arca sunt bizantij 65536: propter quod in una arca earum oportet habere bizantium 1, minus supradicta demonstratione.

civitates
65536
domus
65536
arce
65536
bizantij
65536

XII.9.3

Et si cum granis frumenti

ipsum scacherium duplicare uolueris; et ex hijs quot naues onerate exeat; quarum unaquaque haberet modia 500 pisanos; quorum quodlibet est sextaria 24; quorum quodlibet ponderat libras 140; quarum unaquaque ponderat uncias 12; et in unaquaque uncia ponderat denarios 25 de cantera; quorum unusquisque ponderat carrubias 6; quarum unaquaque ponderat grana frumenti 4, disponantur hec omnes sub quadam uirgula sic per ordinem: $\frac{4}{46} \frac{0}{25} \frac{0}{12} \frac{0}{140} \frac{0}{24} \frac{0}{50} \frac{0}{0}$; et numerum scacherij, scilicet 18446744073709551615, diuides per suprascriptas partes, que sunt sub uirgula; et quicquid super 4, que sunt in capite uirge remanserit, erunt grana; et quicquid supra 6 remanserit, erunt carrube; et quicquid supra 25, erunt denarij de cantera; et quicquid supra 12, erunt uncie; et quicquid supra 140, erunt libre; et quicquid supra 24, erunt sextaria; et quicquid supra 500 remanserit, erunt modia: numerus uero, qui ex diuisione superauerit, erit numerus nauium oneratarum, ut hic ostenditur $\frac{3}{46} \frac{20}{25} \frac{6}{12} \frac{115}{140} \frac{13}{24} \frac{123}{500} \widehat{1725028445}$; qui nauium numerus, quam infinitus, et innumerabilis sit, satis liquido hic deprehenditur. Et nota, quod modia 500 uniuscuiusque nauis sunt modia thalatia, scilicet de romania 16000; uel modia sorie 8000; uel salme sicilie 4000.

XII.9.4

Secunda uero duplicatio scacherij , scilicet cum quislibet sequentium punctorum omnium antecedentium duplus esse proponitur, dupliciter inueniri potest: primum quidem, ut de puncto in punctum usque ad finem numerando eas. Secundus uero modus est, ut accipias 1, quod proponitur in primo puncto, et addas cum cum 2, que ponuntur in secundo, erunt 3; que 3 multiplicata in se, erunt 9; que 9 sunt numerus duplicationis primi puncti, etiam et dupli secundi puncti, scilicet de punctis tribus. Verbi gratia : si in primo ponatur 1. In secundo duo. In tercio 6, scilicet duplum duorum antecedentium punctorum, summa eorum erit 9, ut prediximus: que 9, si in se multiplicentur, faciet 81; qui numerus est duplicatio primi puncti, etiam et dupli duorum sequentium punctorum, scilicet de punctis 5. Verbi gratia : si in primo punto ponitur 1. In secundo 2. In tercio 6. In quarto 18. In quinto 54, nimirum in 81 ascendunt; que 81, si in se multiplicaueris, facient 6561; qui numerus est duplicatio primi puncti , etiam et dupli .^{mij.}^{or} punctorum sequentium , scilicet de punctis 9. Verbi gratia. Numerus primi puncti est 1; secundi 2; tertij 6; quarti 18; quinti 54; sexti 162; septimi 486; octaui 1458; noni 4374: quibus omnibus iunctis, faciunt 6561; que 6561 in se multiplicata, faciunt 43046721; qui numerus, suprascriptis dispositis, est duplicatio primi puncti, etiam et dupli octo sequentium punctorum, scilicet de punctis 17. Vnde si multiplicaueris 43046721 in se, reddunt 1853020188831841 pro duplicatione primi puncti, et dupli 16 punctorum, uidelicet pro duplicatione punctorum 33: quo numero in se multiplicato , reddit 3433683820292512484657849089281 pro duplicatione totius scacherij, etiam et unius puncti amplius; qui punctus duplum totius scacherij est: quare oportet, ut tercia pars numeri suprascripti sit numerus duplicationis totius scacherij : quare diuiso ipso numero per 3 , reddit pro duplicatione totius scacherij
144561273430837494885949696427.

XII.9.5

Qvidam dedit unum denarium ad usuram, ita quod in quinque annis debebat duplum ipsius denarij recipere; et in alijs quinque debebat duplum habere duorum illorum denariorum; et sic semper de 5 in 5 annis duplicabatur capitale ipsius, et usura: queritur, quot denarios ex ipso denario habere debeat in 100 annis: diuide ipsos annos 100 per 5, exibunt 20: ergo uigesies duplicatur denarius ille. Vnde 20 punctorum scacherij gerit similitudinem: quare si duplicauerimus ipsum denarium uigesies, ha:bebimus summam, in qua ipse denarius ascenderit in 100 annis: uel aliter duplia ipsum denarium, erunt 2; in quo numero ipse denarius ascendit in primo quinquennio : que 2 iterum multiplica in se, erunt 4; in quo numero ipse denarius ascendit in secundo quinquennio: que 4 iterum multiplica in se, erunt 16; | qui numerus est summa, in qua ascendit ille denarius in quarto quinquennio; que 16 duplia, erunt 32 pro summa quinti quinquennij: que 32 in se multiplica, erunt 1024 pro summa decimi quinquennij: que 1024 in se multiplica, reddunt denarios 1048576 pro summa uigesimi quinquennij, scilicet annorum ipsorum 100, qui sunt libre 4369, et denarij 16. Eadem regula est de homine, qui uendidit 20 paria pellium; ex primo quorum debebat habere 1 denarium; ex secundo 2; ex tercio 4; et sic semper duplicando usque ad ultimum par; quorum summa est denarius 1, minus de predicta summa.

XII.9.6

Septem uetule uadunt romam; quarum quilibet habet burdones 7; et in quolibet burdone sunt saculi 7; et in quolibet saculo panes 7; et quilibet panis habet cultellos 7; et quilibet cultellus habet uaginas 7. Queritur summa omnium predictorum. Primum quidem multiplica numerum uetularum, scilicet 7, per numerum burdonorum, scilicet per 7, erunt burdones 49; quos multiplica per numerum tascarum, scilicet per 7, erunt tasche 343; quas multiplica per numerum panum unius tasche, scilicet per 7, erunt panes 2401; quos multiplica per numerum cultellorum unius panis, scilicet per 7, erunt cultelli 16807; quos multiplica per numerum uaginarum unius cultelli, scilicet per 7, erunt uagine 117649; quibus iunctis cum cultellis 16807, et cum panibus 2401, et cum saculis 343, et cum burdonibus 49, et cum uetulis 7, erunt in summa 137256, ut in descriptione ostenditur.

137256

7

49

343

2401

16807

117649

XII.9.7

Aliter quo sunt genera rerum uniuscuiusque uetule ,
tot septimos pone in quadam uirga, cum genera rerum ascendant per septenarium; et
ante ipsam uirgam pone 1 pro una uetularum, et retro uirgam pone 7, scilicet nu-
merum uetularum ; et multiplicat per prima 7 , et $7 \frac{1}{7} \frac{1}{7} \frac{1}{7} \frac{1}{7} \frac{1}{7}$ 1 , et adde unum ,
quod est super ipsa, et erunt 8; que per aliam $\frac{1}{7}$, erunt 57; que multiplicat per ter-
ciam $\frac{1}{7}$; que per reliquias septimas, et habe pro numero rerum unius uetule 19608; que
multiplicata per 7, que posita sunt post uirgulam, erunt 137256, ut per aliud modum
inuenimus.

Summa

137256

XII.9.8

Est arbor, que habet ramos 100, et in quolibet ramo sunt nidi 100; et in quolibet nido sunt oua 100; et in quolibet ouo sunt aues 100. Summam enim rerum potes inuenire per suprascriptas regulas uetularum; sed qualiter aliter fieri debeat, hic ostendamus: primum describe ramos 100, ante quos pone duo zephira propter 100 nidos, qui sunt in quolibet ramo, erunt 10000; ante que etiam pone duo alia 00 propter oua 100, que sunt in quolibet nido, erunt 1000000; ante que etiam adde 00 duo pro 100 auibus, que sunt in quolibet ouo, erunt 100000000: deinde dele zephiras (*sic*), qui sunt in primo gradu, et in tercio, et in quinto, et in septimo illius numeri; et pone in eiusdem gradibus 1; et sic habebis 101010100 pro quesita summa. Nam si suprascriptas species ramorum, scilicet et nidorum, ouorum, et auium per mille numerum accrescerent, poneres in primo ramos 1000, ante que poneres tria zephira pro nidis, et tria alia pro ouis, et tria alia pro auibus sic: 1000000000000; de quo numero debes demere pri-
mum, et quartum ab eodem, scilicet quartum, et septimum, et decimum; et pone unitates in eiusdem gradibus, et habebis summam ipsorum, ut hic ostenditur 1001001001000: et sic intelligas, si species suprascripte ascenderent per decem mille, uel per centum mille, uel per quemlibet aliud numerum unitatem habentem in ultimo gradu, et zephira in reliquis. |

Summa

100 100 100 1000

XII.9.9

XII.9.10

Qvidam habuit bizantios 100, et transiuit per .xii. ciuitates; et oportebat, ut in unaquaque illarum ciuitatum daret decimam suorum bizantiorum, quos deferebat secum; queritur, quot remanserint ei post exitum .xii.^{sim} ciuitatum: quia dabat decimum in unaquaque ciuitate, sequebatur necessario, quod sibi remanerent 9^{oem} decime omnium bizantiorum, quos ipse detulerat in ipsa ciuitate: quare pones $\frac{9}{10}$ duodecies per ordinem in quadam uirga terminante in circulo a sinistra, sic: 100 $\overset{9}{\cancel{1}} \overset{9}{\cancel{0}} \overset{9}{\cancel{1}} \overset{9}{\cancel{0}} \overset{9}{\cancel{1}} \overset{9}{\cancel{0}} \overset{9}{\cancel{1}} \overset{9}{\cancel{0}} \overset{9}{\cancel{1}} \overset{9}{\cancel{0}} \overset{9}{\cancel{1}}$; et multiplica in unum omnia 9, que sunt super uirga, scilicet 9, per 9; que per 9, erunt 729; que multiplica in se, erunt 531441, que sunt summa sex nouenariorum; quam summam multiplica in se ipsam, reddunt 282439536481 pro summa omnium nouenariorum; que multiplica per 100, et diuide per omnia 10, que sunt sub uirgula, exhibunt bizantij $\overset{1}{\cancel{0}} \overset{8}{\cancel{0}} \overset{4}{\cancel{0}} \overset{6}{\cancel{0}} \overset{3}{\cancel{0}} \overset{5}{\cancel{0}} \overset{9}{\cancel{0}} \overset{2}{\cancel{0}} \overset{1}{\cancel{0}} \overset{2}{\cancel{0}}$ 28 pro eo, quod ei remansit in fine.

residuum										
1	9	4	6	3	5	9	2	4	2	28

XII.9.11

Vnde

si volueris cognoscere, quot bizantios inter omnes ciuitates dedit; de bizantijs quidem centum extractes 28 cum suis fractionibus; residuumque erit quesitum. Quod inuenies sic: protrahe aliam uirgulam, sub qua sint decies 10 in ordinem pro decem decimis, que sunt sub uirgula suprascripti residui; et accipe 1, quod est super prima 10 in sinistra parte, et extrahe eum de 10, et remanent 9; que pone super priora 10 uirge protracte, et retine in manu 1: ideo quia ex ipso 1, qui est super 10, et ex ipso nouenario semel persicitur decenarius numerus; cum quo 1 seruato in manu adde 8, que sunt super sequentia 10, erunt 9; que extrahe de 10, remanet 1; quod pone super 10 noni gradus protracte uirge, et retine 1 in manu; cum quo adde 4, que sunt super 10 octaui gradus, erunt 5; que extrahe de 10, remanent 5; que pone super 10 octaui gradus, et retine in manu 1; cum quo adde 6, que sunt super 10 septimi gradus, erunt 7; que extrahe de 10, remanent 3; que 3 pone super 10 septimi gradus, et retine 1, quod adde cum 3, que sunt super 10 sexti gradus uirge, erunt 4; que extrahe de 10, remanent 6; que pone super 10 sexti gradus, et retine 1; quod adde cum 5, que sunt super 10 quinti gradus, et extrahe de 10, remanent 4 super 10 quinti gradus; et retineas in manu 1, quod adde 1 cum 9, que sunt super 10 quarti gradus, et extrahe de 10, remanet 0 super 10 quarti gradus, et retine in manu 1; quod adde cum 2, que sunt super 10 tercij gradus, et extrahe de 10, remanent 7 super octauum 10 tercij gradus, et retine 1; quod adde cum 4, que sunt super 10 secundi gradus, et extrahe de 10, remanet 5 super 10 secundi gradus, et retineas 1; cum quo adde 2, que sunt super 10 primi gradus, et extrahe de 10, remanent 7 super 10 primi gradus protracte, et retineas 1; quod adde cum bizantijs 68, extrahe de bizantijs 100, remanent bizantij 71 ante ipsam uirgam, ut hic ostenditur $\frac{9}{10} \frac{1}{10} \frac{5}{10} \frac{3}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{7}{10} \frac{5}{10} \frac{7}{10}$ 71, pro hoc, quod dedit inter omnes illas ciuitates.

Santax exilis

~~9 1 5 3 6 4 0 7 5 7~~ 74

XII.9.12

Nam si hoc, quod dederit, uel quod ei remanserit de ciuitate in ciuitate, scire uolueris, extrahe decimam ex illis 100 bizantijs, quos dedit in prima ciuitate, scilicet bizantios 10, remanent ei 90 bizantij: de quibus bizantijs 90 extrahe decimam, scilicet bizantios 9, quos dedit in secunda ciuitate, remanent ei bizantij 81; de quibus bizantijs 81 extrahe decimam, scilicet bizantijs $\frac{9}{10}$ s, quos dedit in tercia ciuitate, remanent bizantij $\frac{9}{10} \cdot 72$; de quibus accipe decimam, quam dedit in quarta ciuitate ; que duplici modo accipitur: primus modus est, ut multiplices 72 per suam uirgulam, scilicet per 10, et adde 9, erunt 729; que diuide per 10, exibunt $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 7$ pro decima parte de $\frac{9}{10} \cdot 72$. Vel aliter. Pone duas decimas sub quadam uirgula; et super primam pone 9, que sunt super 10 de uirgula de 72; et super alia 10 pone 2, que sunt in primo gradu de 72; et remanentia 7 pone ante ipsam uirgulam, et habebis similiter $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 7$; que extrahe $\frac{9}{10} \cdot 72$, que duplici modo extrahuntur: communis omnium modus est, ut multiplices 7 per suam uirgulam, erunt centesime 729; deinde multiplica 72 per suam uirgulam, erunt decime 729; quas multiplica per 10, ut sint centesime, sicut sunt ille, que debinc debes extrahere, erunt centesime 7290; ex quibus extrahe centesimas 729, remanent centesime 6561; quas diuide per 100, scilicet per $\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}$, exibunt bizantij $\frac{9}{10} \cdot \frac{6}{10} = 65$ pro suprascripto residuo.

XII.9.13

Vel aliter: protrahe retro uirgulam , que est post 72, et pone sub eadem 10, et super ipsum 10 pone 0, ut sint decime due sub ipsa uirgula, sicuti sunt sub ea, que est post 7, ut hic ostenditur , de $\frac{0}{10} \frac{9}{10}$ 72: deinde accipe 9, que sunt super 10 in uirgula $\frac{9}{10} \frac{2}{10}$ 7; et extrahe ea de 0, quod est super 10, de uirgula de $\frac{0}{10} \frac{9}{10}$ 72: quod cum non sit possibile, adde 10 super ipsum 0, scilicet numerum, qui est sub uirgula, sub ipso 0, erunt 10; de quibus, cum possibile sit, extrahe 9, remanet 1; quod pone super priora 10. cuiusdam uirgule, sub qua sint similiter decime due, et pro addito decenario retine in manu 1; quod adde cum 2, que sunt super ultima 10 de uirgula de $\frac{9}{10} \frac{2}{10}$ 7, erunt 3 ; que extrahe de 9 , cum possibile sit, que sunt super ultima 10 de uirgula de $\frac{0}{10} \frac{9}{10}$ 72, remanebunt 6 ; que pone super ultima 10 protracte linee, et extrahe 7 de bizantijs 72, remanent bizantij 65; quos pone ante protractam uirgulam, et habebis similiter pro suprascripto residuo bizantios $\frac{1}{10} \frac{6}{10}$ 65;

XII.9.14

de quibus accipe decimam, quam dedit in quinta ciuitate: que dupliciter per suprascriptos modos potest accipi; scilicet multiplica 65 per suam uirgulam, scilicet per $\frac{1}{10}$, et adde 6; que per $\frac{1}{10}$, et adde 1, hoc est quod ante 65 pones 6 et 1, que sunt super uirga; et sic habebis suprascriptas centesimas 6561; quas diuide per $\frac{1}{10}$, et per ruptos, qui sunt sub ipsa uirgula, scilicet per $\frac{1}{10} \frac{0}{10} \frac{0}{10}$, exibunt $\frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{5}{10}$ 6 pro decima parte eorum. Vel aliter: protrahe quandam uirgulam, sub qua pones tres decimas; et super primam pone 1, quod est super prima 10 in uirgula de 65; et super alia pone 6, que sunt super alia 10; et super tertiam pone figuram primi gradus de 65, scilicet 5; et remanentia 6 pone ante ipsam uirgulam; et sic | habebis $\frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{5}{10}$ 6 pro decima parte de suprascriptis bizantijs $\frac{1}{10} \frac{6}{10}$ 65:

XII.9.15

quare extrahe ipsos ab ipsis, qui
 dupliciter per suprascriptos numeros extrahuntur; quos modos hic reiterabimus, ut in
 reliquis ciuitatibus melius scias procedere: multiplica bizantios 6 per eorum uirgulam,
 et habebis millenas 6561. Similiter multiplica 65 per suam uirgulam; uel pone ante
 ipsam figuras, que sunt super uirgulam retro, similiter per ordinem procedendo, erunt
 centesime 6561; quas multiplica per 10, ut sint millene, sicut sunt alic, quas debes hinc
 extrahere, erunt millene 65610; de quibus extrahe millenas 6561, remanent 59049; quas
 diuide per 1000, hoc est per $\frac{1}{10} \frac{0}{10} \frac{0}{10}$, exibunt $\frac{9}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10}$ 59 pro quesito residuo. Vel aliter:
 protrahe retro uirgulam de 65, et pones sub ipsa decem, et super ipsa decem pone
 0, ut hic ostenditur $\frac{0}{10} \frac{1}{10} \frac{0}{10}$ 65: deinde 1, quod est super 10 de uirgula de $\frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{5}{10}$ 6,
 extrahe de 0, quod est super 10 de uirgula de 65; quod cum possibile non sit, adde
 cum ipso 0 numerum existentem sub ipso, scilicet 10, erunt 10; de quibus extrahe
 suprascriptum 1, remanent 9; que pone super primam 10 cuiusdam protracte uirgule,
 sub qua sint tres decime; et pro addito decenario retine in manu 1; quod adde cum
 6, que sunt super 10 uirgule de $\frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{5}{10}$ 6, erunt 7; que extrahe de 1, quod est super
 secundum 10, de uirgula de $\frac{0}{10} \frac{1}{10} \frac{6}{10}$ 65; quod cum possibile non sit, adde cum ipso
 1 numerum existentem sub ipso, scilicet 10, erunt 11; ex quibus extrahe suprascripta
 7, remanent 4, que pone super secunda 10 protracte uirgule; et pro 10, que iunxisti
 cum 1, retine in manu 1; quod adde cum 5, que sunt super ultima 10 uirgule de
 $\frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{5}{10}$ 6, erunt 6; que extrahe de 6, que sunt super ultima 10 uirgule de $\frac{0}{10} \frac{1}{10} \frac{6}{10}$ 65,
 remanet 0; quod pone super ultima 10 protracte uirgule: deinde extrahe bizantios 6
 de bizantijs 65, remanebunt bizantij 59; quos pone ante protractam uirgulam, et ha-
 bebis similiter bizantios $\frac{9}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10}$ 59 pro quesito residuo;

de quibus extrahe decimam,

per quem uolueris modum ex suprascriptis duobus modis, que est bizantij $\frac{9}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{40} \frac{9}{40} 5$,
 quos dedit in sexta ciuitate, remanebunt bizantij $\frac{1}{10} \frac{3}{10} \frac{4}{10} \frac{1}{10} 53$; de quibus extrahe decimam, quam dedit in septima ciuitate, que est bizantij $\frac{1}{10} \frac{3}{10} \frac{4}{10} \frac{1}{10} \frac{3}{40} 5$, remanebunt bizantij $\frac{9}{10} \frac{4}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{8}{40} 47$; de quibus extrahe decimam, quam dedit in octaua ciuitate, scilicet bizantios $\frac{9}{10} \frac{5}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{8}{10} 4$, remanebunt bizantij $\frac{1}{10} \frac{2}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{40} 43$; de quibus extrahe decimam, quam dedit in nona ciuitate, scilicet bizantios $\frac{1}{10} \frac{2}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{5}{10} \frac{0}{10} \frac{8}{40} 4$, remanebunt bizantij $\frac{9}{10} \frac{8}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10} \frac{7}{40} 38$; de quibus extrahe decimam, quam dedit in decima ciuitate, scilicet bizantios $\frac{9}{10} \frac{8}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10} \frac{7}{10} \frac{8}{40} 3$, remanebunt bizantij $\frac{1}{10} \frac{0}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10} \frac{8}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{8}{40} 34$; de quibus extrahe decimam, quam dedit in undecima ciuitate; scilicet bizantios $\frac{1}{10} \frac{0}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10} \frac{8}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{8}{10} 3$, remanebunt bizantij $\frac{9}{10} \frac{0}{10} \frac{6}{10} \frac{9}{10} \frac{5}{10} \frac{0}{10} \frac{1}{10} \frac{3}{10} \frac{9}{10} \frac{3}{40} 31$; de quibus extrahe decimam, que dedit in ultima ciuitate, scilicet bizantios $\frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{6}{10} \frac{9}{10} \frac{5}{10} \frac{0}{10} \frac{1}{10} \frac{8}{10} \frac{2}{10} \frac{1}{40} 3$, remanebunt bizantij $\frac{1}{10} \frac{8}{10} \frac{4}{10} \frac{6}{10} \frac{3}{10} \frac{5}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10} \frac{2}{40} 28$, ut per aliam regulam superius inuenimus: et ut hoc, quod dictum est, melius ad oculum deprehendatur, hic inferius bizantios, quos in unaquaque ciuitate dedit, in una parte, et in alia bizantios, qui remanserunt, per ordinem describimus.

hij sunt bizantij, qui remanserunt. 100

hij sunt bizantij, quos dedit. 10

90

81

9

$\frac{9}{10} 72$

$\frac{1}{10} 8$

$\frac{1}{10} \frac{6}{10} 65$

$\frac{9}{10} \frac{2}{10} 7$

$\frac{9}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{40} 59$

$\frac{1}{10} \frac{5}{10} \frac{5}{10} 6$

$\frac{1}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10} 53$

$\frac{9}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{40} 5$

$\frac{9}{10} \frac{6}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{8}{40} 47$

$\frac{1}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10} \frac{1}{10} \frac{8}{40} 5$

$\frac{1}{10} \frac{2}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{8}{10} 43$

$\frac{9}{10} \frac{6}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{8}{10} 4$

$\frac{9}{10} \frac{8}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10} \frac{7}{40} 38$

$\frac{1}{10} \frac{2}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{8}{40} 4$

$\frac{1}{10} \frac{0}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10} \frac{8}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{8}{10} 34$

$\frac{9}{10} \frac{8}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10} \frac{7}{10} \frac{8}{40} 3$

$\frac{9}{10} \frac{0}{10} \frac{6}{10} \frac{9}{10} \frac{5}{10} \frac{0}{10} \frac{4}{10} \frac{8}{10} 31$

$\frac{1}{10} \frac{0}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10} \frac{8}{10} \frac{7}{10} \frac{6}{10} \frac{8}{10} 3$

$\frac{1}{10} \frac{9}{10} \frac{4}{10} \frac{6}{10} \frac{3}{10} \frac{5}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10} \frac{2}{40} 28$

$\frac{9}{10} \frac{0}{10} \frac{6}{10} \frac{9}{10} \frac{5}{10} \frac{0}{10} \frac{1}{10} \frac{8}{10} \frac{3}{10} \frac{4}{40} 3$

XII.9.17

Eadem questio est de bucte, in qua sunt bariles 100 uini, ex quibus per singulos menses extrahitur decimum residui ; et queritur, quot bariles in fine anni remanserunt, scilicet post 12 menses. Nam si econtra propositum esset, quod quidam habens bizantios perrexit per 12 ciuitates, et dedit in unaquaque ciuitate decimam residui suorum bizantiorum, et remanserunt ei bizantij $\frac{1}{10} \frac{3}{10} \frac{4}{10} \frac{6}{10} \frac{3}{10} \frac{5}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10} \frac{2}{10}$ 28; et queratur, quota sit summa bizantiorum ipsius: describe in ordine duodecies $\frac{9}{10}$ sub quadam uirgula, suprascripta ratione , ut hic ostenditur $\frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{2}{10} \frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{9}{10}$; et multiplicia bizantios 28 cum suis fractionibus per omnia 10, que sunt sub duodecim nouenarijs prescripte uirgule; et diuide summam ipsius multiplicationis per illos duodecim nouenarios, cum positi fuerint sub quadam uirgula ; et sic habebis bizantios 100 pro summa illius.

XII.9.18

Quidam habens bizantios uoluit exire de quadam ciuitate habente portas 10; et oportuit eum dare prime porte $\frac{2}{5}$ suorum bizantiorum, et insuper $\frac{2}{5}$ unius bizantij; secunde dimidium bizantiorum, quos ibi attulit, et insuper $\frac{1}{2}$ unius bizantij. Tercie tertium, et $\frac{1}{3}$ unius bizantij. Quarte quartam, et $\frac{1}{4}$ unius bizantij; et ita per ordinem, usque quod in decima porta dedit decimam bizantiorum, quos ibi attulit, et $\frac{1}{10}$ unius bizantij, et remansit ei bizantius 1; queritur, quot bizantios habuit ille. Potest itaque hec questio dupliciter solui: primum quidem, ut de porta in portam, ab ultima incipiendo, egrediaris sic. Nam in fine remansit ei bizantius 1, et dedit ultime porte decimam unius bizantij: ergo cum ipse dedit ipsam decimam, habebat bizantium $\frac{1}{10} 1$; et quia tunc dederat decimam bizantiorum, quos ibi attulit, et remansit ei bizantius $\frac{1}{10} 1$; inueniendus est numerus; ex quo, extracta $\frac{1}{10}$, remaneat bizantius $\frac{1}{10} 1$: quem numerum pone ut sit 10, secundum regulas arborum; de quo, extracto $\frac{1}{10}$, remanent 9; que uellent esse $\frac{1}{10} 1$: quare multiplica 10 per $\frac{1}{10} 1$, et diuides per 9, exibunt bizantij $\frac{2}{9} 1$; et tantum remansit ei post nonam portam; cum quo adde $\frac{1}{9}$ unius bizantij, quem dedit none porte, erit bizantius $\frac{1}{9} 1$. Quare inuenies numerum; de quo, extracta $\frac{1}{9}$ ipsius, remaneat bizantius $\frac{1}{9} 1$. Pones ergo, quod numerus ille sit 9; de quo, extracto $\frac{1}{9}$, remanent 8; que uellent esse $\frac{1}{9} 1$: quare multiplica $\frac{1}{9} 1$ per 9, et diuides per 8, exibit bizantius $\frac{1}{2} 1$; et tantum remansit ei post octauam portam: cum quo adde $\frac{1}{2}$ unius bizantij, quod dedit in ipsa porta, erit bizantius $\frac{2}{3} 1$; quem, demonstrata ratione, multiplica per 8, et diuide per 7, exibit bizantius $\frac{6}{7} 1$: cum quo adde $\frac{1}{7}$ unius bizantij, quod dedit septime porte, erunt bizantij 2; quos multiplica per 7, et diuide per 6, exibunt bizantij $\frac{2}{3} 2$; cum quibus adde $\frac{1}{6}$ unius bizantij, quem dedit sexte porte, erunt bizantij $\frac{1}{2} 2$; quos multiplica per 6, et diuide per 5, exibunt bizantij 3; cum quibus adde $\frac{1}{5}$ unius bizantij, quem dedit quinte porte, erunt bizantij $\frac{1}{3} 3$; quos multiplica per 5, et diuide per 4, exibunt bizantij 4; cum quibus adde $\frac{1}{4}$ unius bizantij, quem dedit quarte porte, erunt bizantij $\frac{1}{2} 4$; quos multiplica per 4, et diuide per 3, exibunt bizantij $\frac{2}{3} 5$; cum quibus adde $\frac{1}{3}$ unius bizantij, quam dedit tercie porte, erunt bizantij 6; quos multiplica per 3, et diuide per 2, exibunt bizantij 9; et tot remanserunt ei post secundam portam: cum quibus adde $\frac{1}{2}$ unius bizantij, quod dedit in secunda porta, erunt bizantij $\frac{1}{2} 9$; pro quibus inuenies numerum, ex quo, extracto dimidio ipsius, remaneant bizantij $\frac{1}{2} 9$; pro quo numero pones 2, ex quo, extracto dimidio, remanet 1; quod uellet esse $\frac{1}{2} 9$: quare multiplica $\frac{1}{2} 9$ per 2; et diuides per 1, exibunt bizantij 19; et tot remanserunt ei post primam portam; cum quibus adde $\frac{2}{3}$ unius bizantij, quas dedit in prima porta, erunt bizantij $\frac{2}{3} 19$; pro quibus inueniendus est numerus; de quibus, extractis $\frac{2}{3}$ ipsius, remaneant bizantij $\frac{2}{3} 19$: pone quod numerus ille sit 3, ex quo, extractis $\frac{2}{3}$, remanet 1; quod uellet esse $\frac{2}{3} 19$: quare multiplica $\frac{2}{3} 19$ per 3, et diuides per 1, secundum suprascripti arboris regulas, exibunt bizantij 59; et tot habuit ille.

XII.9.19

Aliter. Inueniamus primum summam bizantiorum, de qua potuit dare partes superscriptas in 10 portas sine fractionibus unius bizantij, que adduntur in eisdem portis; quod inuenies sic: quia ex ipsa summa dedit prime porte $\frac{2}{3}$; ergo ex eadem remansit ei tercia pars: de qua tercia dedit dimidium in secunda porta; et sic remansit ei dimidium tercie partis eiusdem summe; de quo dedit in tercia porta terciam partem; et sic remanserunt ei due tercie medietatis tercie partis eiusdem summe: quo modo, et ordine, si de porta in portam processeris, inuenies ei remansisse in fine .x. portarum $\frac{9}{10} \frac{8}{9} \frac{6}{7} \frac{5}{6} \frac{4}{5} \frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$ ex predicta summa; quod residuum ponitur suisse bizantium 1. Quare que portio habet denominans ipsius uirge ad denominatum, eamdem proportionem habet 1 ad predictam summam. Quare multiplicabis sumnam multiplicationis omnium numerorum, qui sunt sub uirga, per 1, et diuides per omnes numeros, qui sunt super uirga, inter quos est euitatio maxima; ita quod non oportet multiplicare nisi 3 per 10, scilicet numeros extremos, et diuidere per 1, et habebis 30; quos oportuit eum habere, ut persolueret suprascriptas partes in prescriptis partis (sic), et remaneat ei bizantius 1. Vnde, ut habeamus bizantios, de quibus ipse persoluit fractiones unius bizantij in singulis portis, multiplica $\frac{2}{3}$ unius bizantij, quas dedit in prima porta, per 3, que primo posita sunt sub uirgula; et diuide per 1, quod est super ipsa 3, erunt bizantij 2; quos adde cum 30 inuentis, erunt bizantij 32. Nam ipsi bizantij 2 sunt illi, de quibus dedit duas partes, et remanserunt inde $\frac{2}{3}$ unius bizantij, quas dedit in prima porta. Item multiplica $\frac{1}{2}$ unius bizantij, quod dedit in secunda porta, per 3, et per 2, que sunt sub uirgula; et diuide per 1, quod est super 3, et per 1, quod est super 2, erunt bizantij 3; de quibus dedit in prima porta $\frac{2}{3}$ ipsorum, et in secunda dimidium reliqui, et insuper dimidium unius bizantij, quod dedit in secunda porta; quibus bizantijs 3 additis cum bizantijs 32 inuentis, erunt 35. Item multiplica $\frac{1}{3}$ unius bizantij, quam dedit in tercia porta, per numeros trium portarum, qui sunt positi sub uirgula, scilicet per 3; que per 2; que per 3; et diuides per uumeros, qui sunt positi super ipsos tres numeros, scilicet per 1, quod est super 3, et per 1, quod est super 2, et per 2, que sunt super alia 3, erunt similiter bizantij 3; quos oportuit eum habere in tercia porta, ut persoluerentur ex eis antecedentes partes, et insuper $\frac{1}{3}$ unius bizantij eidem porte; quibus additis cum bizantijs 35 inuentis, erunt bizantij 38. Rursum multiplica $\frac{1}{4}$ unius bizantij per numeros .iiiij.^{or} portarum, qui sunt sub uirgula, scilicet per 4; que per 3; que per 2; que per 3; et diuides per numeros earundem portarum, qui sunt super uirgulam, scilicet per 3, que sunt super 4, et per 2, que sunt super 3, et per 1, quod est super 2, et per 1, quod est super 3; et euitabis hoc, quod poteris, exhibunt similiter bizantij 3; quod idem si fecerimus de reliquis portis, habebimus similiter in unaquaque bizantios 3: quibus omnibus ternarijs, uidelicet .vii. portarum, que remanent, insimul iunctis, faciunt bizantios 21; quibus additis cum bizantijs 38 inuentis, reddunt similiter bizantios 59 pro summa bizantiorum illius. |