Fibonacci e i rotti

un approccio

storico e laboratoriale

allo studio delle frazioni

Diario di bordo

classe 2H dell'IC Piazza Winckelmann - Roma a.s. 2019-20

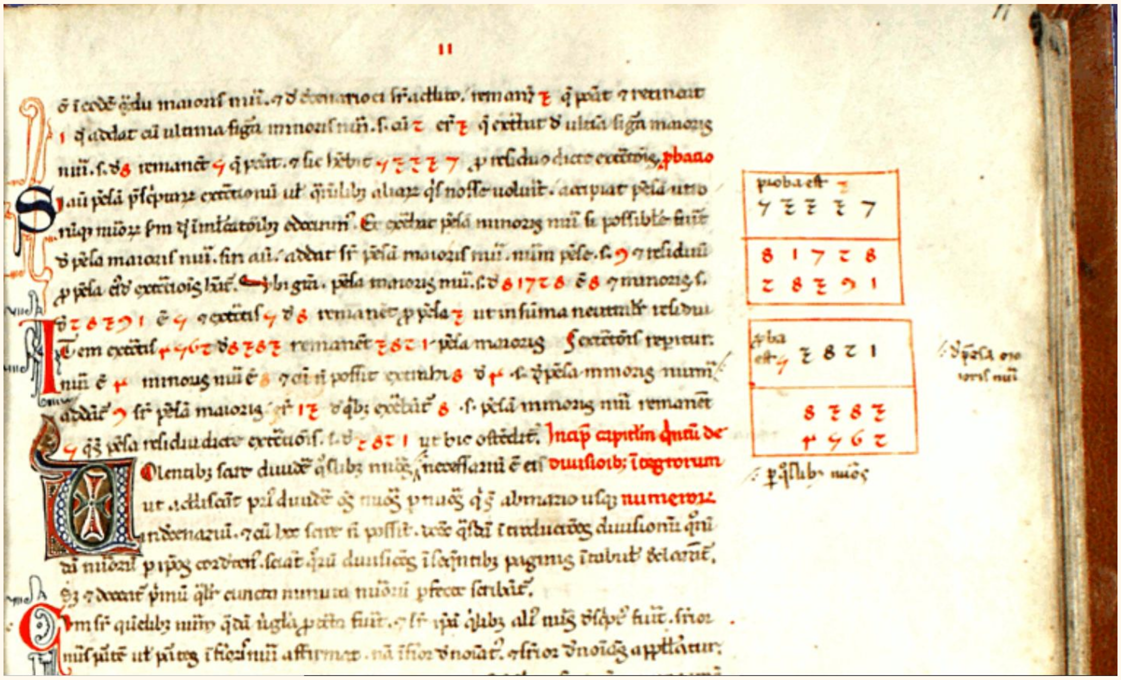
Introduzione

Questo lavoro, che si configura come un laboratorio di matematica, nasce dal desiderio di rendere più accessibile uno dei nodi della programmazione della matematica nella scuola secondaria di primo grado: le frazioni. Attraverso la lettura del Liber Abaci di Leonardo Fibonacci tentiamo un approccio storico allo studio del concetto di frazione come numero. Attraverso specifiche attività didattiche vorremmo mettere in evidenza il grande contributo reso da Fibonacci allo sviluppo della scienza italiana ed europea con la diffusione della cultura indo araba:

- perchè è utile introdurre i numeri rappresentati in questa notazione?
- come si opera con essi?
- come si possono spiegare gli algoritmi che permettono di operare con le frazioni?

queste sono alcune delle domande a cui proveremo a dare risposte partendo da osservazioni condivise frutto di attività svolte in classe.

Dal link https://www.progettofibonacci.it/liber/BONCOMPAGNI/trad/trad05B.html abbiamo letto in classe la prima pagina del capitolo V del Liber Abaci in cui Fibonacci spiega per la prima volta come deve essere scritta una frazione.



Metodologia di lavoro

Come abbiamo lavorato (date, tempi metodologia) e come abbiamo costruito il diario

Il laboratorio è iniziato nel mese di ottobre 2019 ed è terminato alla fine di dicembre.

Metodologia

Abbiamo cercato di lavorare nel giorno della settimana in cui l'orario prevede due ore consecutive: il lavoro con le mani , ma soprattutto la fase di discussione e condivisione richiedono tempo e calma.

La classe lavora divisa in 5 gruppi da 4 o 5 (22 alunni):

Gruppo 1 (G1): Guido, Emma, Giorgia, Edoardo
Gruppo 2 (G2): Matteo Galassi, Ludovica, Matteo Cabiddu, Ginevra, Matilde
Gruppo 3 (G3): Lucia, Simone Saccone, Giulio Sisti, Arianna
Gruppo 4 (G4): Chiara , Daniele, Angelica C, Gabriel, Giovanni
Gruppo 5 (G5): Giulia, Ludovico, Ivan, Angelica D.

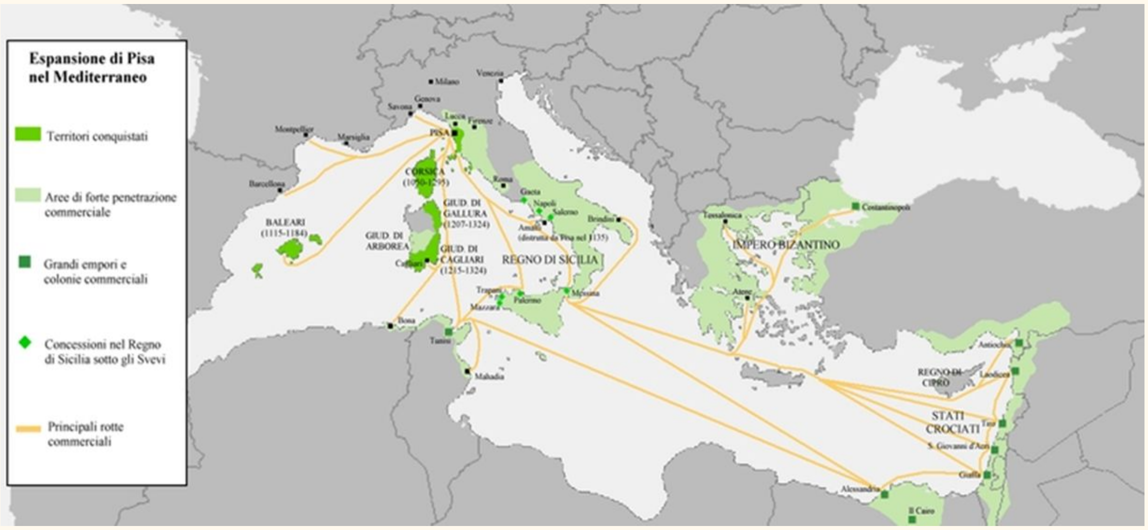
Durante le attività l'insegnante svolge un ruolo di supervisione, raccogliendo una documentazione fotografica e in fase di condivisione delle osservazioni modera gli interventi.

Vogliamo arricchire con i ragazzi ogni 7 giorni il diario di bordo riportando le osservazioni fatte in classe e descrivendo con le nostre parole quanto fatto.

Al termine di ogni settimana l'insegnante divide in segmenti le attività svolte e affida la verbalizzazione di ciascuna attività a un gruppo secondo un format comune. Nell'incontro successivo viene condivisa la lettura del diario, suggerendo se necessario integrazioni e/o modifiche.

Premessa

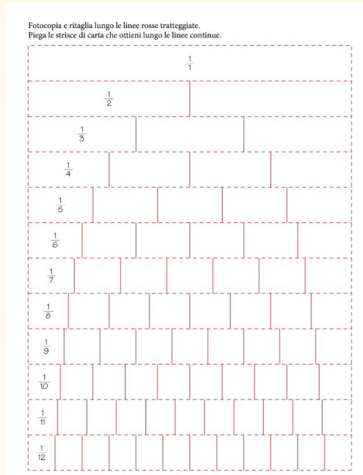
Abbiamo conosciuto Leonardo Fibonacci: chi era, quando è vissuto, perché è venuto in contatto con la ricca cultura araba ed ha intuito i grandi vantaggi che sarebbero venuti dall'uso del nuovo sistema di numerazione. Il contesto storico è quello della fiorente espansione della Repubblica marinara di Pisa che estende i suoi commerci in tutto il Mediterraneo. Il giovane Leonardo raggiunge il padre in Tunisia dove completa la sua istruzione venendo a conoscere la matematica araba. Capisce l'enorme ricchezza del nuovo sistema di numerazione e , non senza difficoltà, comincia a diffondere la nuova scuola il Italia.



1. Come abbiamo costruito le aste: descrizione della scheda e procedimento

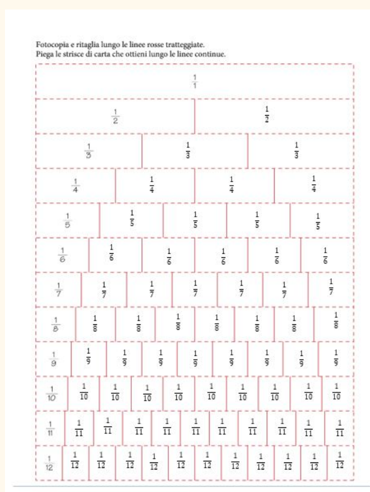
La prima attività svolta è stata la costruzione del materiale da usare con le mani.

Siamo partiti da questa scheda stampata in dimensione A4



come prima cosa abbiamo osservato cha la stessa asta (rettangolo) viene divisa in parti uguali sempre più piccole: nella seconda riga due parti uguali, nella terza tre e così via fino a 12: ognuna delle parti in cui è divisa l'unità è l'unità frazionaria.

Abbiamo quindi completato la scheda scrivendo in ciascuna parte l'unità frazionaria corrispondente



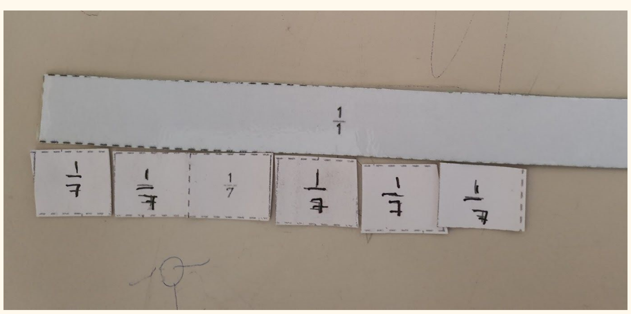
A questo punto abbiamo incollato la scheda su un cartoncino e abbiamo tagliato prima le strisce e poi le singole unità frazionarie avendo cura di separare, usando dei sacchettini o una scatola a scomparti, i diversi gruppi di unità frazionarie.

2. Come costruire un numero rotto

Gruppo 5 (G5): Giulia, Ludovico, Ivan, Angelica D

Materiale usato: per costruire un numero rotto abbiamo utilizzato un intero e l'abbiamo diviso in parti uguali.

Esempi svolti in classe: costruiamo 6/7



spiegate che cos'è un numero "rotto" per Fibonacci:

per Fibonacci un numero rotto è una parte dell'intero che è stato diviso in parti uguali.

un rotto si scrive usando due numeri interi separati da una linea orizzontale $\frac{n}{m}$

m il numero che si trova **sotto** la linea orizzontale rappresenta le parti in cui è diviso l'intero e si chiama denominatore

n il numero che si trova **sopra** la linea orizzontale rappresenta le parti prese in considerazione e si chiama numeratore

Un rotto ha il numeratore minore del denominatore.

regola generale: come costruire un rotto tipo $\frac{n}{m}$ con n<m

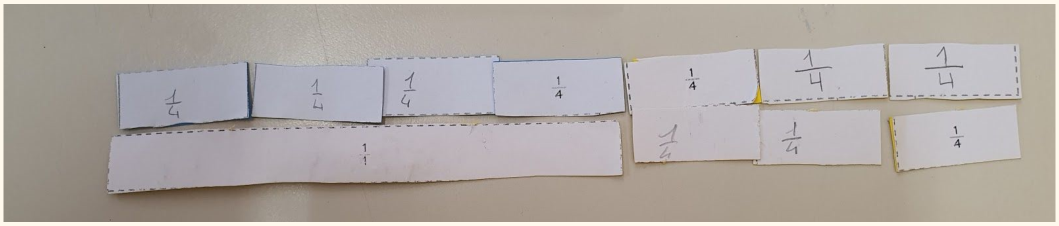
Si sommano tante unità frazionarie (denominatore =*m*) quante indicate dal numeratore *n*

3. Come costruire un numero misto

Gruppo 2 (G2): Matteo Galassi, Ludovica, Matteo Cabiddu, Ginevra, Matilde

Materiale usato: unità frazionarie costruite con la carta e plastificate

esempi svolti in classe: *costruiamo 7/4 cioè 1 ¾*



spiegate che cos'è un numero "misto" per Fibonacci e quale notazione viene usata per scriverli:

Per Fibonacci un numero misto è dato dalla somma di un intero con un numero rotto che deve avere il numeratore minore del denominatore.

Regola generale: come costruire un numero misto tipo $\frac{n}{m}$ con n>m

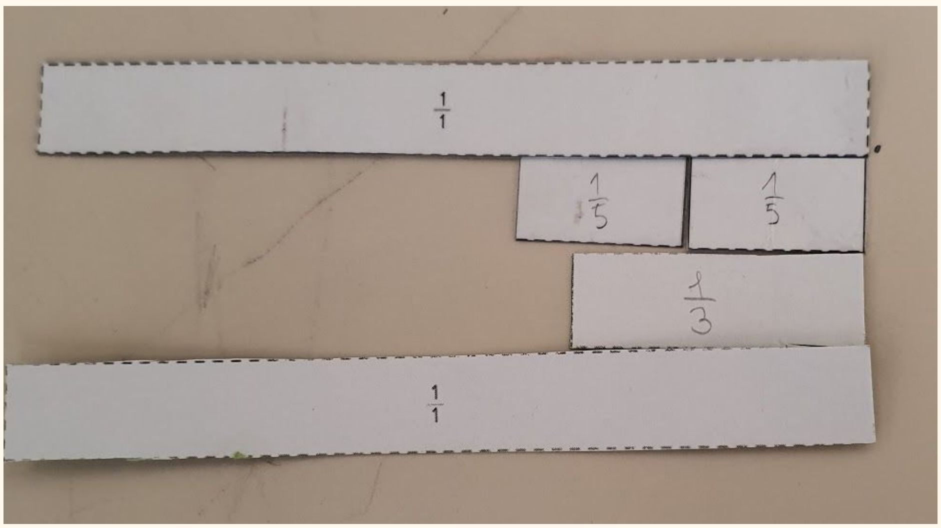
- si costruisce il numero come somma n di unità frazionarie con denominatore m
- sostituisco m unità frazionarie con l'intero
- mi rimane una parte intera (formata da uno o più interi) e un rotto

4. Confrontiamo due rotti – regola

Gruppo 1 (G1): Guido, Emma, Giorgia, Edoardo

Materiale usato: Unità frazionarie o rotti di diverse misure.

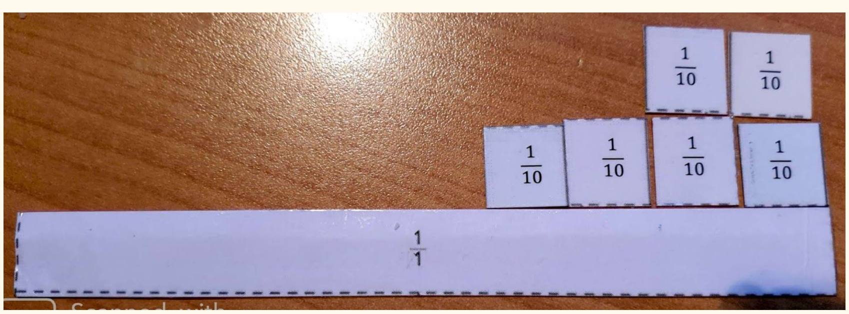
Esempi svolti: sono state prese diverse unità frazionarie o rotti e sono state confrontate tra loro.



Spieghiamo come abbiamo lavorato con le aste: (Edoardo)

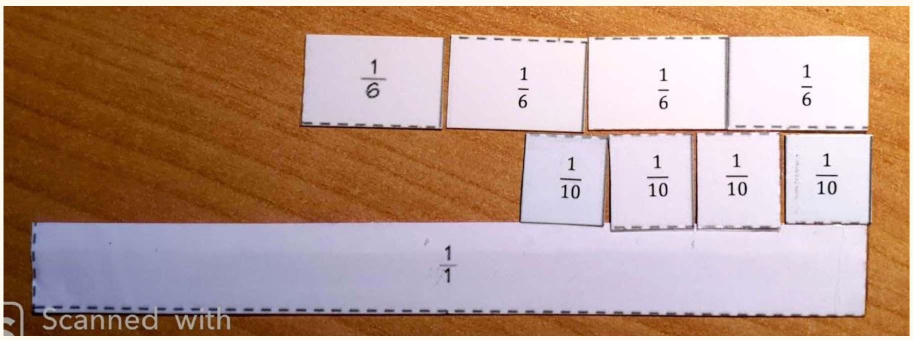
Regola generale: I rotti sono disposti uno sotto l’altro con un estremo allineato; dall’immagine si può vedere che $\frac{2}{5}$ sono più grandi di $\frac{1}{3}$

- Caso n°1 - rotti con lo stesso denominatore (Emma): confrontando rotti con lo stesso denominatore è maggiore il rotto con il numeratore più grande.



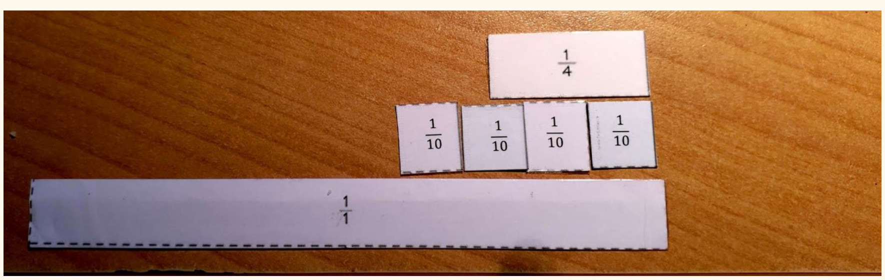
nella foto 2/10 < 4/10

- Caso n°2 - rotti con lo stesso numeratore (Guido): confrontando uno o più rotti che hanno lo stesso numeratore, sarà maggiore quello con denominatore minore;



nella foto 4/6 < 4/10

- Caso n°1 - rotti con diversi denominatore (Giorgia) :



per il momento osserviamo con attenzione la costruzione allineando bene i due rotti da confrontare ad un estremo

¼ < 4/10

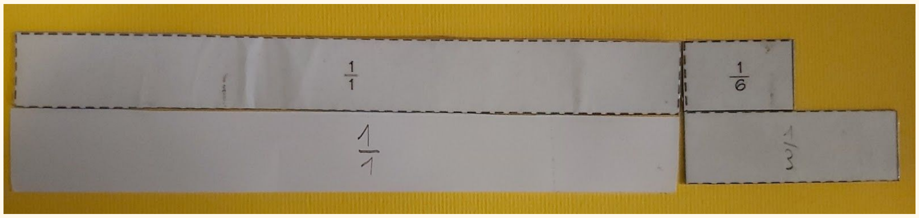
5. Confrontiamo due misti - regola

Gruppo 4 (G4): Chiara , Daniele, Angelica C, Gabriel, Giovanni

per fare questa attività ciascuno deve integrare il materiale e costruire almeno tre aste corrispondenti all'intero (1/1). Bisogna formare i numeri misti come somma di interi e rotti seguendo il procedimento dell'attività della costruzione di misti

Materiale usato: Aste frazionarie di valori diversi.

esempi svolti: Sono stati confrontati due rotti di diverse misure 7/6 e 12/9



regola generale: come confrontare due numeri misti qualsiasi?

Se i misti hanno la stessa parte intera; è maggiore quello con la parte frazionaria maggiore nell'immagine, cioè con il rotto maggiore

Invece i misti con la diversa parte intera è maggiore quello con la parte intera maggiore.

Esempio: $2\frac{1}{3} > 1\frac{4}{5}$

Infine i misti sono uguali quando la parte intera e i rotti sono uguali.

6. Come rappresentare un rotto come somma di rotti con un altro denominatore

Gruppo 3 (G3): Lucia, Simone Saccone, Giulio Sisti, Arianna

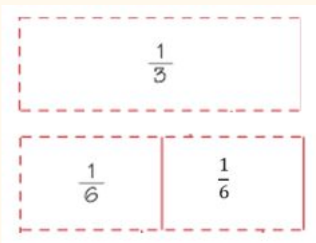
Materiale usato: Abbiamo usato delle aste divise in parti diverse che però hanno lo stesso valore.

introduzione

Esempio: scrivere 1/3 con rotti con altri denominatori

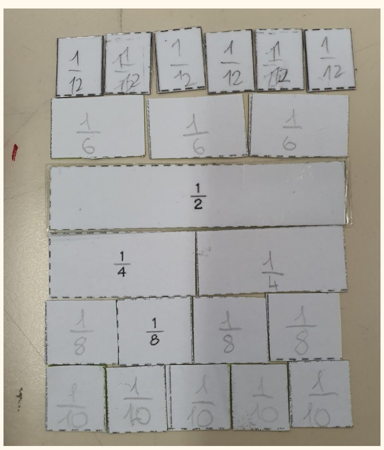
1/3 = (1/6 + 1/6) =2/6

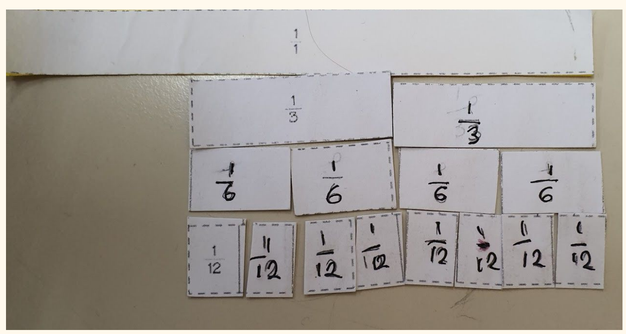
L'asta 1/3 è lunga come due aste da 1/6



esempi svolti in classe:

½= (¼ + ¼) = ⅙ + ⅙ + ⅙ = 1/12 +1/12 +1/12 +1/12 +1/12 +1/12 = ⅛ +⅛ +⅛ +⅛ =1/10 +1/10 +1/10 +1/10 +1/10 +1/10





⅔ =⅙ +⅙ +⅙ +⅙ = 1/12 +1/12 +1/12 +1/12 +1/12 +1/12 +1/12 +1/12

In classe ogni gruppo ha proposto le seguenti regole:

G3: moltiplicando sia il numeratore che il denominatore della frazione primaria per lo stesso numero ottengo una frazione che indica la stessa quantità

G2: possiamo trovare i rotti "equivalenti" , cioè che indicano la stessa quantità , solo con i multipli secondo lo stesso numero del numeratore e del denominatore

G4 : il rotto può essere espresso in modo diverso usando i divisori o i multipli del denominatore e dividendo o moltiplicando il numeratore per lo stesso numero

G5 bisogna moltiplicare numeratore e denominatore per lo stesso numero intero

G1: Dividendo più volte per per un divisore comune a numeratore e a denominatore, sia il numeratore che il denominatore, si tornerà sempre al rotto che ha numeratori e denominstore più piccoli

Regola per rappresentare un rotto come somma di rotti con un altro denominatore (oggi diciamo come costruire frazioni equivalenti ad una frazione data

Per costruire una frazione equivalente ad una frazione già data,dobbiamo moltiplicare numeratore e denominatore per uno stesso numero diverso da zero o dividere per per un divisore comune a numeratore e a denominatore, sia il numeratore che il denominatore

7. Somme di rotti

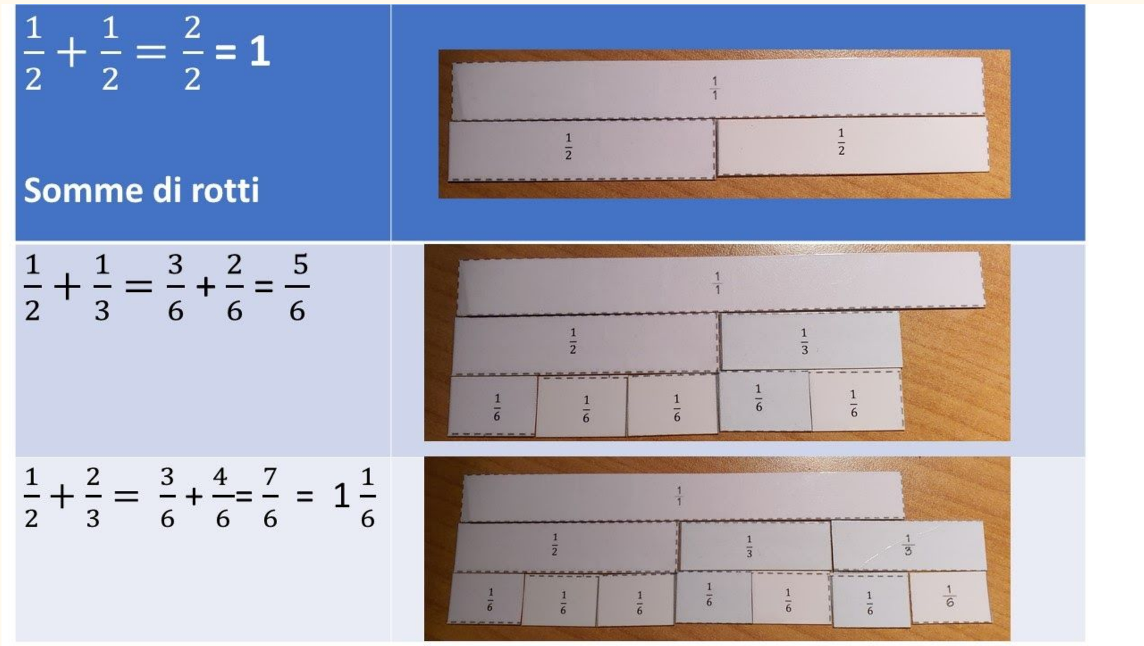
A che serve rappresentare un rotto in tanti modi diversi?

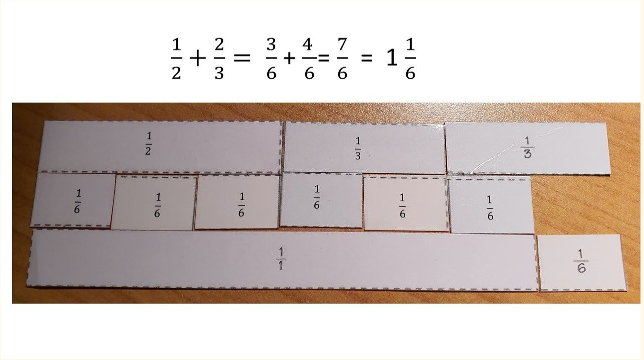
all'inizio può sembrare una complicazione.......

Come si possono sommare due rotti? Ci verrà in aiuto l'esercizio appena fatto .... l'unica difficoltà sarà saper scegliere quale sarà la rappresentazione adatta per poter calcolare la somma fra rotti

Vediamo degli esempi:

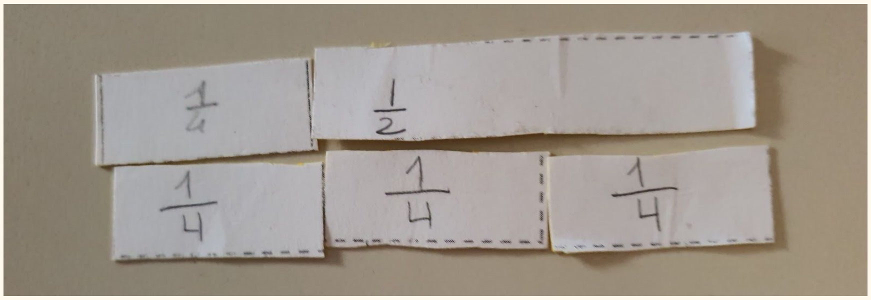
A. addizioni fra rotti con lo stesso denominatore
B. addizioni fra rotti con denominatore diverso
C. addizioni fra rotti con denominatore diverso che danno come somma un numero misto





Ad ogni gruppo viene assegnata una tabella di addizioni tratte dal Liber abaci: i gruppi di suddividono in coppie e cominciano a costruire le somme con l’aiuto del materiale, trovando ogni volta la rappresentazione adatta.

Il lavoro continua a casa per tutti perchè non si riesce in un’ora a eseguire le somme.



Al termine del laboratorio, dopo aver costruito molte somme con il materiale, ogni gruppo deve scrivere la

Regola per sommare due rotti:

A. caso 1: addizioni fra rotti con lo stesso denominatore
B. caso2: addizioni fra rotti con denominatore diverso

G1 - REGOLA PER SOMMARE DUE ROTTI

caso 1: addizioni fra rotti con lo stesso denominatore

per ottenere la somma di due frazioni con lo stesso denominatore basta addizionare i numeratori.

caso2: addizioni fra rotti con denominatore diverso:

per ottenere la somma di due frazioni con diverso denominatore bisogna trovare il m. c. m. dei denominatori, *moltiplicare i numeratori per lo stesso numero (è il numero che si ottiene dividendo il nuovo denominatore per il vecchio)* e poi sommare i numeratori.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{3+5}{15}=\frac{8}{15}$$

G2 - REGOLA PER SOMMARE DUE ROTTI

1. caso 1: addizioni fra rotti con lo stesso denominatore:

Per addizionare 2 rotti che hanno denominatore uguali basta addizionare i numeratori

2. caso2: addizioni fra rotti con denominatore diverso.

   Per addizionare 2 o più frazioni con denominatore diverso bisogna:

   i. Cercare il m.c.m. tra i denominatori
   ii. Trasformare tutti i rotti in rotti equivalenti che hanno per denominatore il m.c.m.
   iii. Addizionare i rotti secondo la regola del caso1

G3 - REGOLA PER SOMMARE DUE ROTTI

1. caso 1: addizioni fra rotti con lo stesso denominatore: per addizionare i rotti con lo stesso denominatore si sommano i numeratori
2. caso2: addizioni fra rotti con denominatore diverso: bisogna trasformare i rotti in rotti equivalenti con lo stesso denominatore (cioè il minimo comune multiplo dei denominatore) e poi addizionare i numeratori

G4 - REGOLA PER SOMMARE DUE ROTTI

1. caso 1: addizioni fra rotti con lo stesso denominatore: per sommare due frazioni che hanno lo stesso denominatore basta sommare i numeratori.
2. caso2: addizioni fra rotti con denominatore diverso: Per sommare due frazioni con il denominatore diverso devi, trovare il m.c.m tra i denominatori, poi trasformare le frazioni in frazioni equivalenti che hanno per denominatore il m.c.m dei denominatori e alla fine addizionare le frazioni.

G5 - REGOLA PER SOMMARE DUE ROTTI

1. caso 1: addizioni fra rotti con lo stesso denominatore: bisogna solo sommare i numeratori del rotto ottenendo cosi la somma
2. caso2: addizioni fra rotti con denominatore diverso: bisogna portare i due rotti allo stesso denominatore, cercando il m.c.m

dei due denominatori, poi si ottiene il m.c.m, poi si trasformano le frazioni di partenza in frazioni equivalenti con il nuovo denominatore, e si sommano i numeratori dei due rotti con il denominatore uguale

Dopo aver ascoltato tutte le proposte, cegliamo la formulazione del Gruppo 2 G2

G2 - REGOLA PER SOMMARE DUE ROTTI

1. caso 1: addizioni fra rotti con lo stesso denominatore:

Per addizionare 2 rotti che hanno denominatore uguali basta addizionare i numeratori

2. caso2: addizioni fra rotti con denominatore diverso: Per addizionare 2 o più frazioni con denominatore diverso bisogna:
    a. Cercare il m.c.m. tra i denominatori
    b. Trasformare tutti i rotti in rotti equivalenti che hanno per denominatore il m.c.m.
    c. Addizionare i rotti secondo la regola del caso1

Per lunedì 4 novembre

Cerchiamo di spiegare in dettaglio il punto b) del caso 2 rispondendo alla seguente domanda:

"una volta stabilito il nuovo denominatore comune a tutti rotti da sommare, **come si trasformano i numeratori?**

G1: per trasformare tutti i rotti devo dividere il m.c.m per il denominatore e moltiplicarlo per il numeratore .

G2: abbiamo diviso il m.c.m per il denominatore e moltiplicato per il numeratore

G3: Si divide m.c.m per il primo denominatore e lo si moltiplica per il suo numeratore . infine si sommano i due rotti.

G4: Il numeratore dev'essere moltiplicato per il risultato della divisione fra l' m.c.m e il vecchio denominatore.

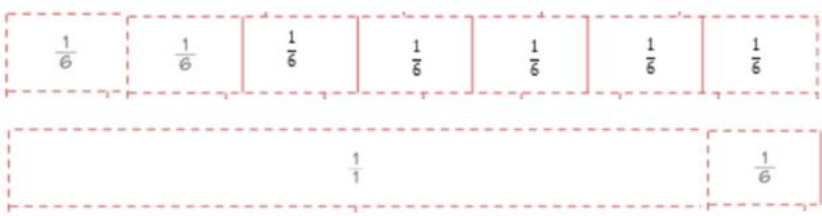
G5: dopo aver trovato il m.c.m. per trovare il numeratore si deve dividere il m.c.m per il primo denominatore e poi moltiplicarlo per il numeratore

8. Somma di misti

Esempio

$$\frac{7}{6}+\frac{3}{2}$$

Come prima cosa scriviamo gli addendi come numeri misti, aiutandoci con le aste

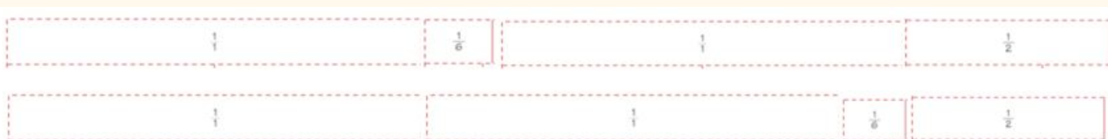


$$\frac{7}{6}=1\ \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{2}=1\ \frac{1}{2}$$

L’addizione diventa

$$1\ \frac{1}{6}+1\ \frac{1}{2}$$



Possiamo perciò sommare interi con interi e rotti con rotti secondo le regole che già conosciamo

$$1\,\frac{1}{6} + 1\,\frac{1}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1+3}{6} = 2\,\frac{4}{6} = 2\,\frac{2}{3}$$

Ad ogni gruppo si consegna un’addizione fra misti da calcolare utilizzando le aste

G1	$\frac{7}{4}+\frac{3}{2}$	G2	$\frac{7}{6}+\frac{4}{3}$	G3	$\frac{5}{4}+\frac{7}{2}$	G4	$\frac{7}{6}+\frac{5}{3}$	G5	$\frac{5}{4}+\frac{5}{2}$

Ecco un esempio di svolgimento del gruppo G4

G4 $\frac{7}{6}+\frac{5}{3}$

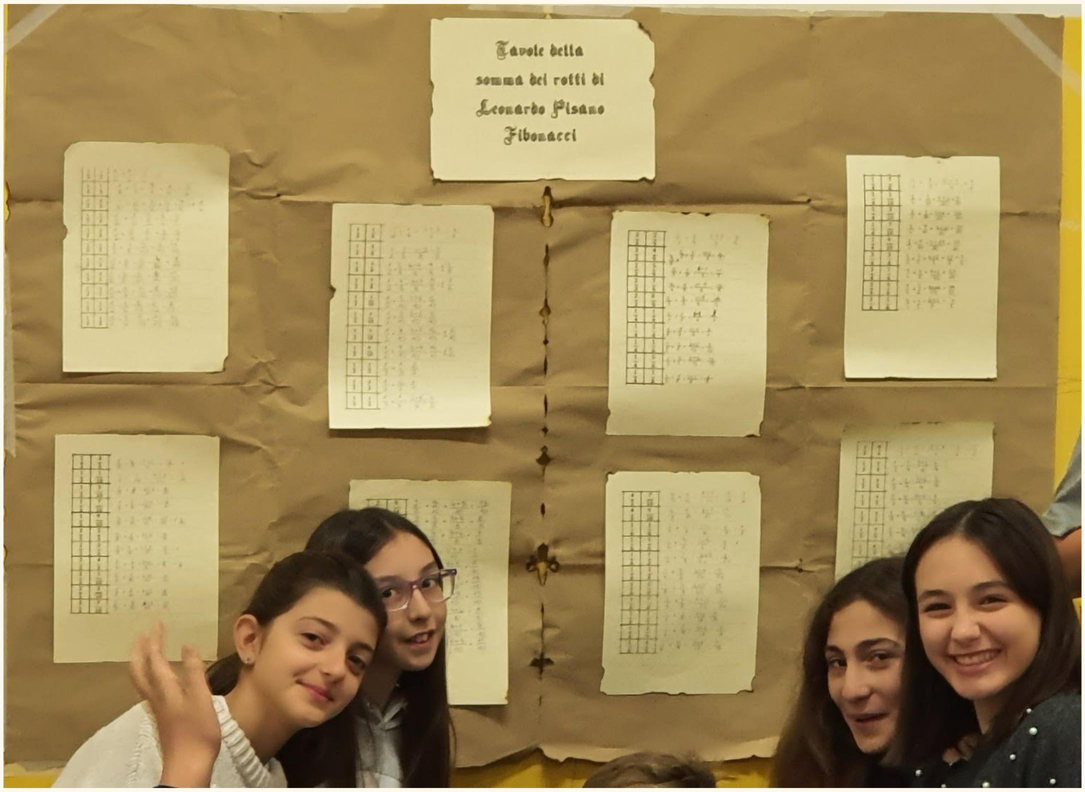
Prima esprimiamo gli addendi come somme di interi e rotti

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{3} = 1\,\frac{1}{6} + 1\,\frac{2}{3}$$

Poi sommiamo interi con interi e rotti con rotti

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{3} = 1\,\frac{1}{6} + 1\,\frac{2}{3} = 1 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1+4}{6} = 2\,\frac{5}{6}$$

… e alla fine con il contributodi tutti i gruppi, costruiamo un grande manifesto che contiene tante addizioni rotti, come faceva Fibonacci per aiutare i suoi alunni a ricordare il metodo per la somma di rotti (*abbiamo usato carta pergamena e abbiamo bruciato i bordi della carta da pacco per anticarla)*

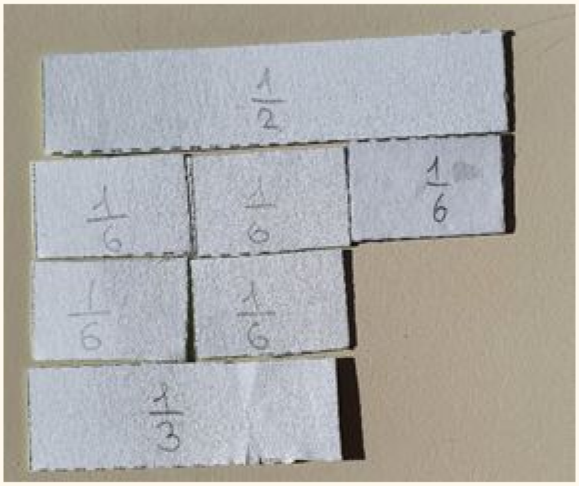


9. Sottrazione

Proviamo

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

Come per l'addizione dobbiamo esprimere i rotti con rotti equivalenti che abbiano le stesso denominatore



Ma in questo caso faremo la sottrazione dei numeratori

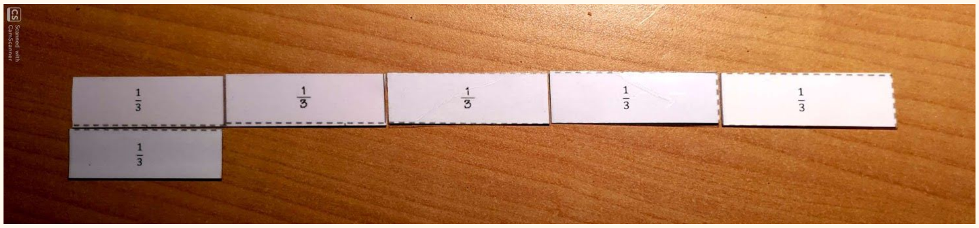
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

Il risultato della sottrazione è il rotto che manca a ⅓ per diventare lungo come 1/2

Con l'aiuto delle aste calcoliamo altre sottrazioni fra rotti e cerchiamo di verbalizzare il procedimento.

Per visualizzare la sottrazione fra rotti usando le aste queste devono essere posizionate in modo differente rispetto alla somma: spiega la differenza

G2: La differenza fra rotti con le aste si può trovare sistemando i rotti uno sotto l'altro in modo che abbiano un estremo allineato e guardando lo spazio mancante (quanto manca al più piccolo per diventare lungo come il grande?) per esempio:



5/3-1/3=4/3

4/3 è la differenza

Spiega la regola generale per eseguire la differenza fra rotti:

G1: devo trovare m.c.m tra denominatori poi dividerlo per il denominatore moltiplicare per il numeratore e sottrarre per ottenere la differenza; lavorando con le aste bisogna metterel una sotto l'altra in modo che un estremo sia allineato.

G3: Quando si hanno i denominatori uguali si eseguono i calcoli della sottrazione solo tra i numeratori. Quando invece si hanno i denominatori diversi si calcola il m.c.m tra i denominatori, si trasformano le frazioni come nel caso delle addizioni e poi si eseguono i calcoli.

G4: Nel primo caso quando i rotti hanno un denominatore in comune bisogna eseguire la sottrazione tra i numeratori.

Nel secondo caso, invece, quando i denominatori sono diversi, per primo bisogna trovare il m.c.m in comune, poi trasformare i rotti come nell'addizione e poi eseguire la sottrazione.

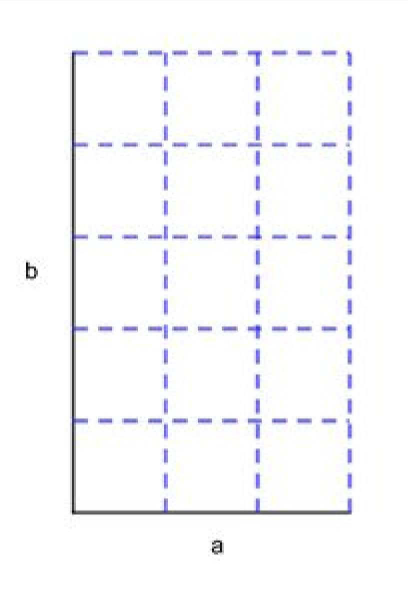
G5: Quando si hanno i denominatori uguali basta sottrarre i numeratori dei due termini e il denominatore rimane lo stesso.

Quando invece abbiamo due denominatori diversi troviamo il m.c.m. tra di loro e poi lo dividiamo per il denominatore del primo termine e poi il risultato lo moltiplichiamo per il numeratore. Si replica questo passaggio anche per l'altro termine e poi si sottraggono i numeratori.

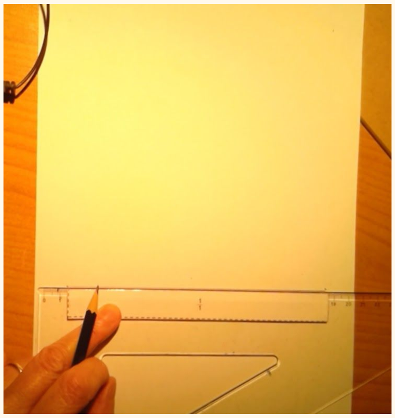
10. Moltiplicazione fra rotti

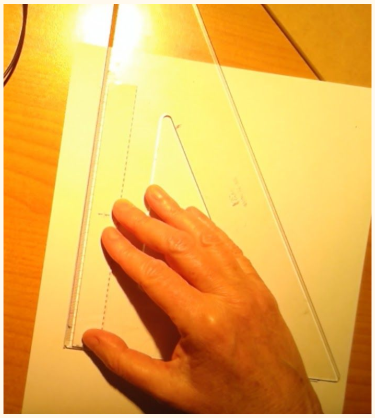
In questa parte del laboratorio oltre alle aste usiamo anche fogli di carta bianca A4, una squadra grande e matite colorate

Cerchiamo di rappresentare geometricamente questa operazione ricordando che il prodotto è rappresentato *a x b* dall'area del rettangolo



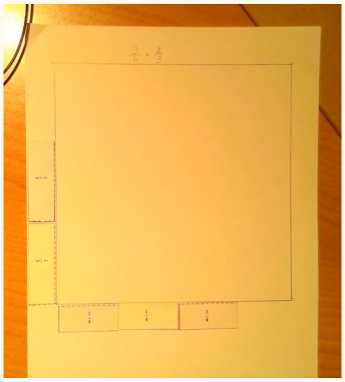
Prendiamo un foglio A4 e disegniamo un quadrato di lato 1/1 usando come unità l'asta 1/1;

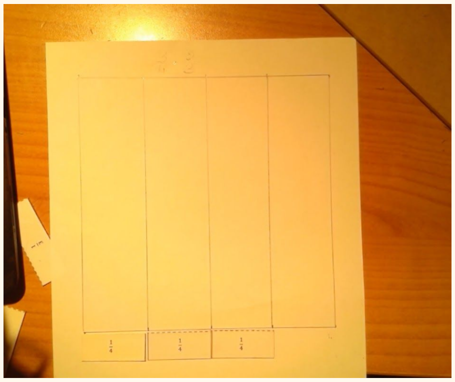




Vogliamo rappresentare la moltiplicazione ¾ x 2/3 e prendiamo dalla nostra scatola il materiale opportuno;

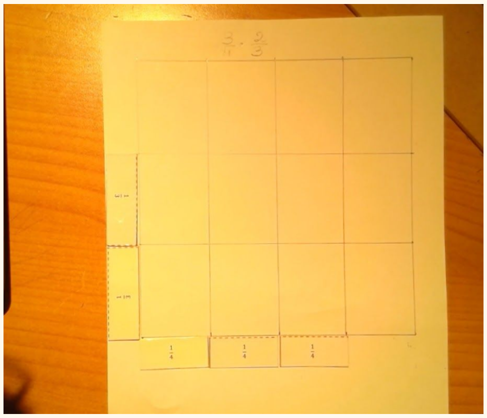
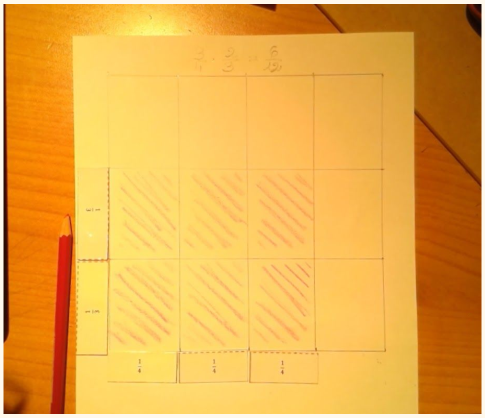
- disponiamo un rotto che rappresenta un fattore su un lato
- tracciamo le parallele al lato perpendicolare secondo le suddivisioni indicate dal denominatore e dividiamo il quadrato in rettangoli



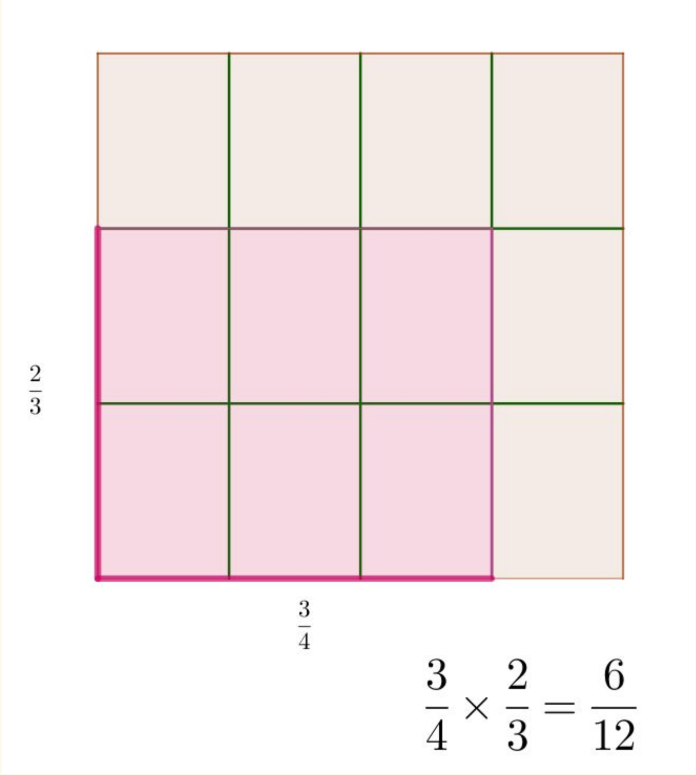


- ripetiamo il procedimento per l’altro fattore sul lato consecutivo
- disponiamo il rotto che rappresenta il secondo fattore sul lato consecutivo perpendicolare al precedente

- tracciamo le parallele al lato perpendicolare secondo le suddivisioni indicate dal denominatore e dividiamo ulteriormente il quadrato in rettangoli

Mettiamo in evidenza il rettangolo di lati ⅔ e ¾ (l'immagine seguente è ottenuta con geogebra)



Per casa viene affidata la realizzazione di un’altra moltiplicazione con la stessa costruzione geometrica:

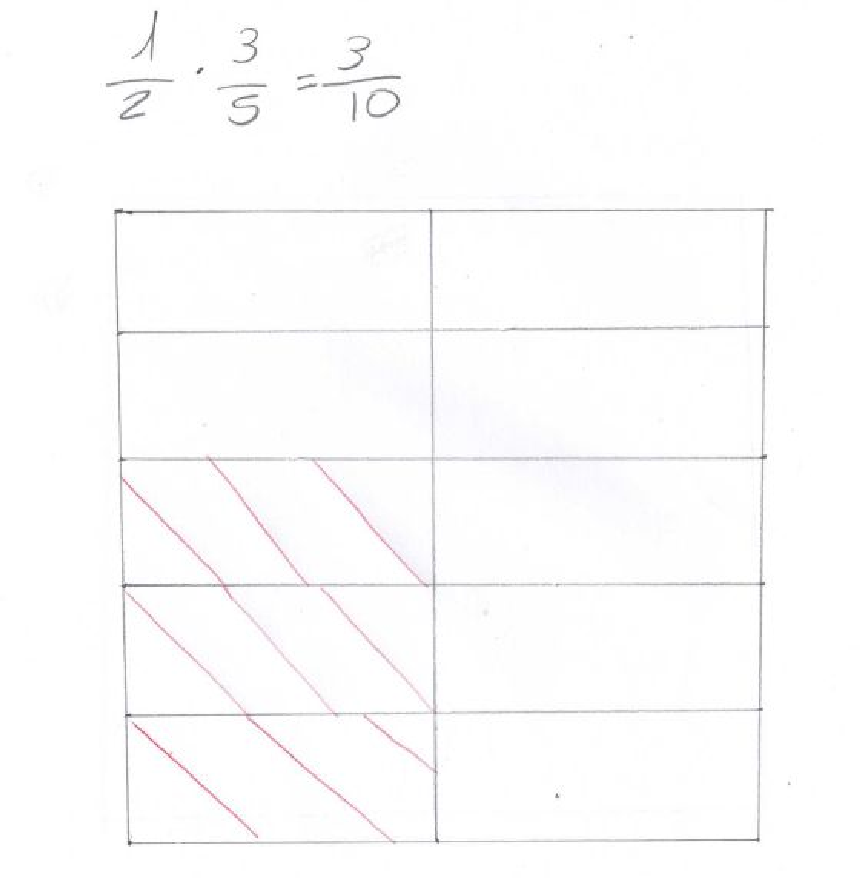
eseguire su un foglio bianco con le aste la moltiplicazione 1/2*⅗

La regola appare subito anche dopo la prima costruzione fatta in classe: *il rotto che rappresenta il prodotto si ottiene moltiplicando numeratore per numeratore e denominatore per denominatore.*

La verifichiamo con altri esempi.

Un’altra osservazione: *moltiplicando due rotti si ottiene un rotto; otteniamo infatti un rettangolo che occupa solo una parte del quadrato unitario.*

ecco un esempio del compito svolto a casa

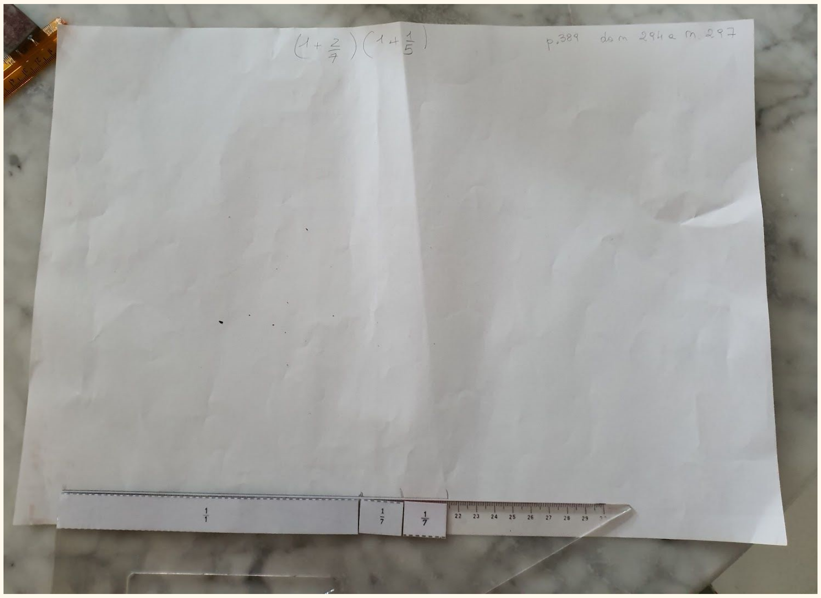


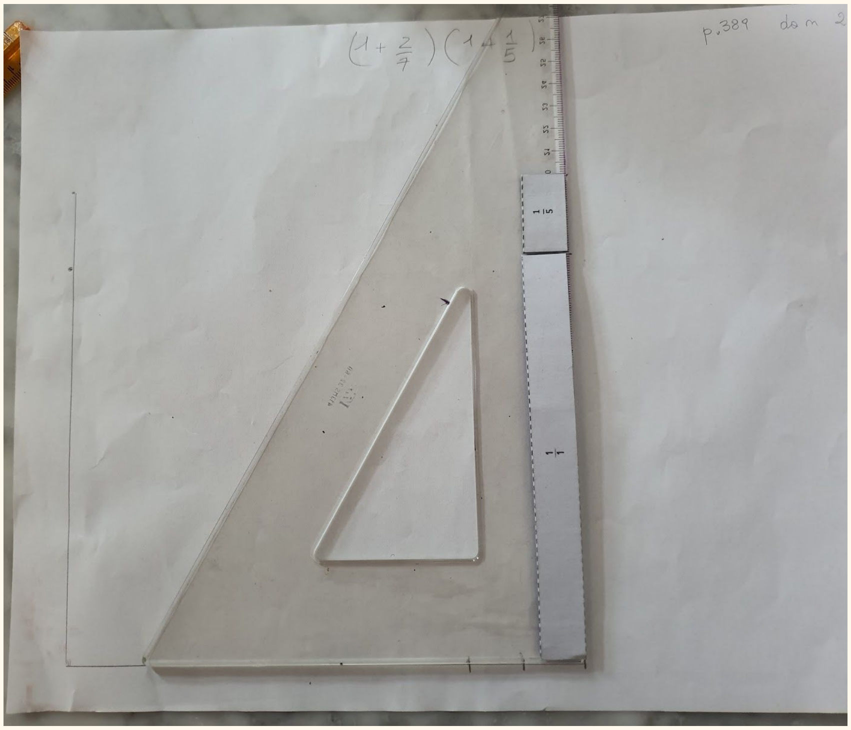
11. Moltiplicazione fra misti

Seguiremo sempre la costruzione geometrica della moltiplicazione , cioè costruiremo il rettangolo che ha come dimensioni i due fattori; vista la grandezza dei numeri avremo bisogno della carta A3

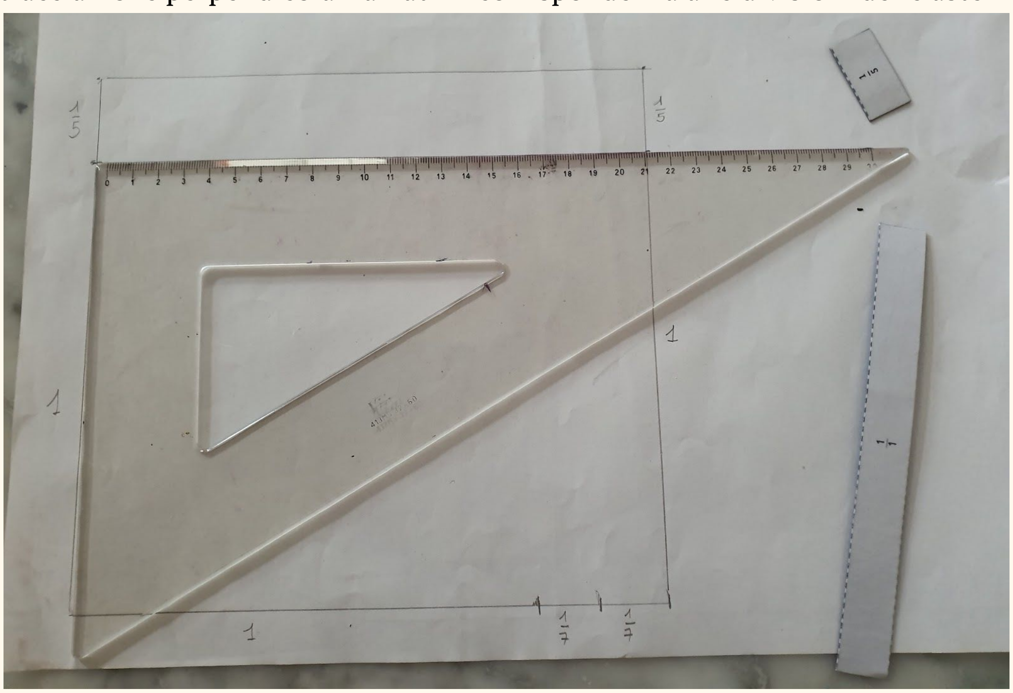
Vogliamo costruire geometricamente il prodotto:

$$1\ {}_{2/7} * 1\ {}_{1/5}$$

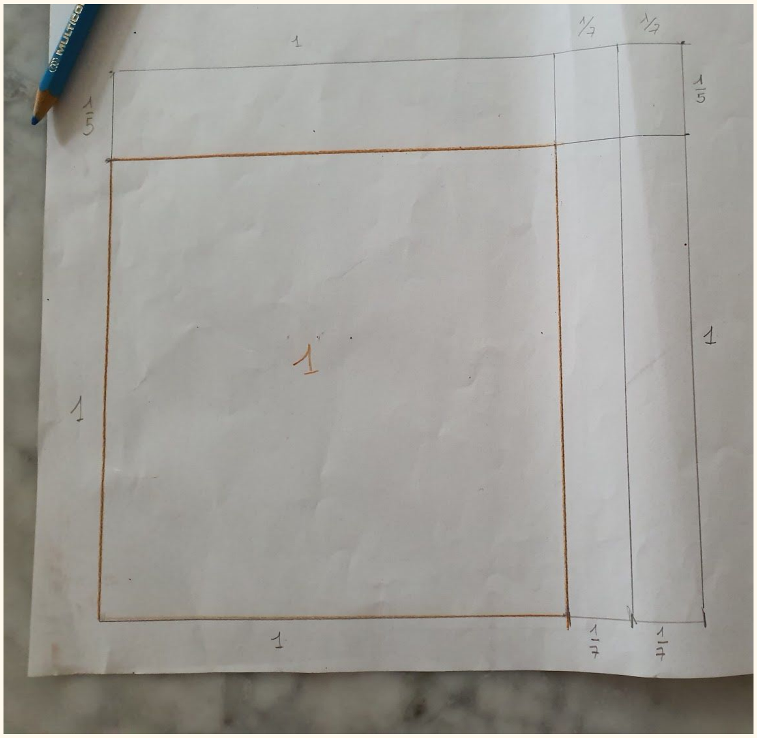
tracciamo la prima dimensione mettendo sulla riga le aste che rappresentano il numero misto1 2/7; ricordiamoci di mettere una tacca in corrispondenza alla lunghezza delle unità frazionarie 
Tracciamo la dimensione perpendicolare aiutandoci con la squadra e mettendo su di essa le aste corrispondenti al secondo fattore; ricordiamoci di mettere una tacca in corrispondenza alla lunghezza delle unità frazionarie



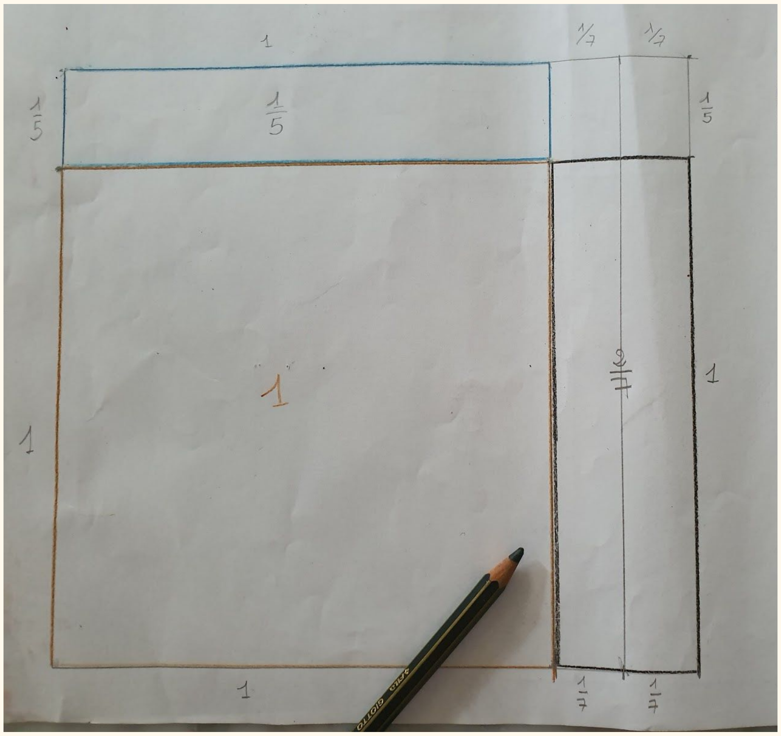
tracciamo le perpendicolari ai lati in corrispondenza alle divisioni delle aste



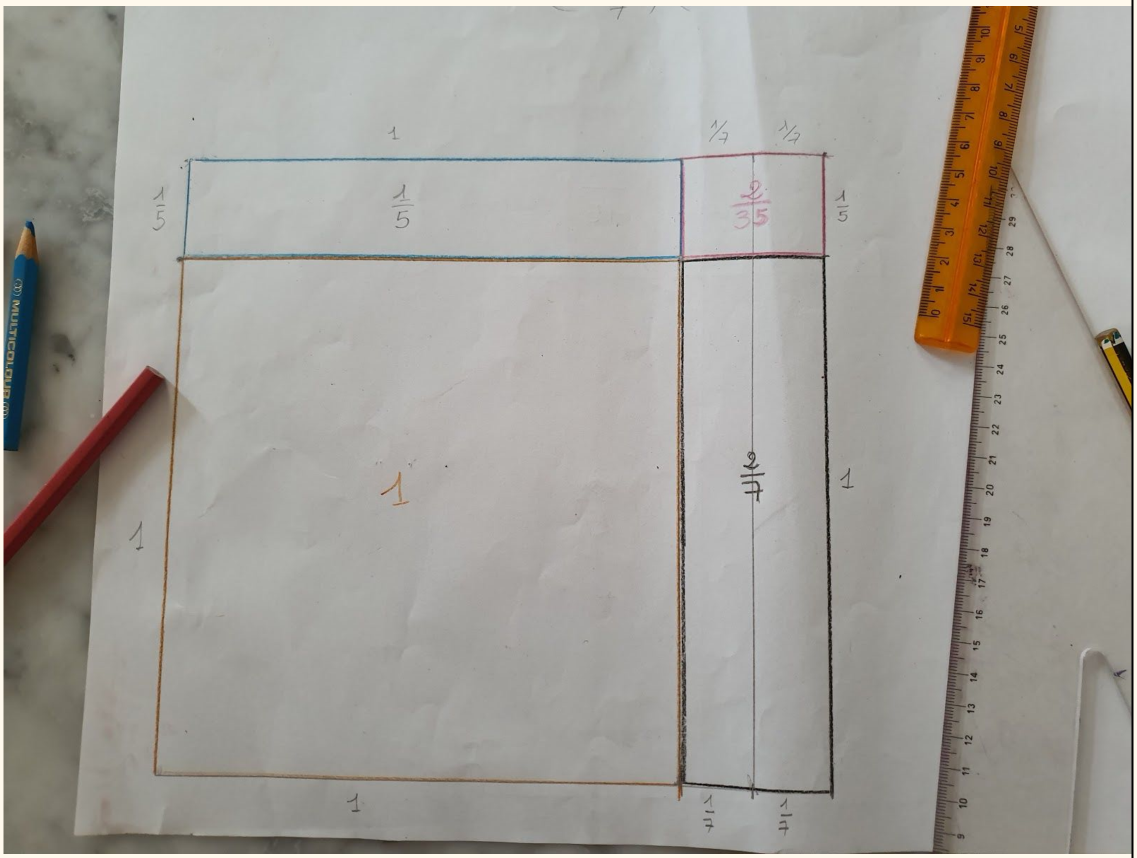
Il rettangolo complessivo che indica il prodotto viene così ad essere diviso in diverse parti il quadrato 1 x 1



il rettangolo 1 x1/5 e il rettangolo 1 x 2/7



il rettangolo 2/7 x 1/5 = 2/35 secondo la regola conosciuta della moltiplicazione fra rotti



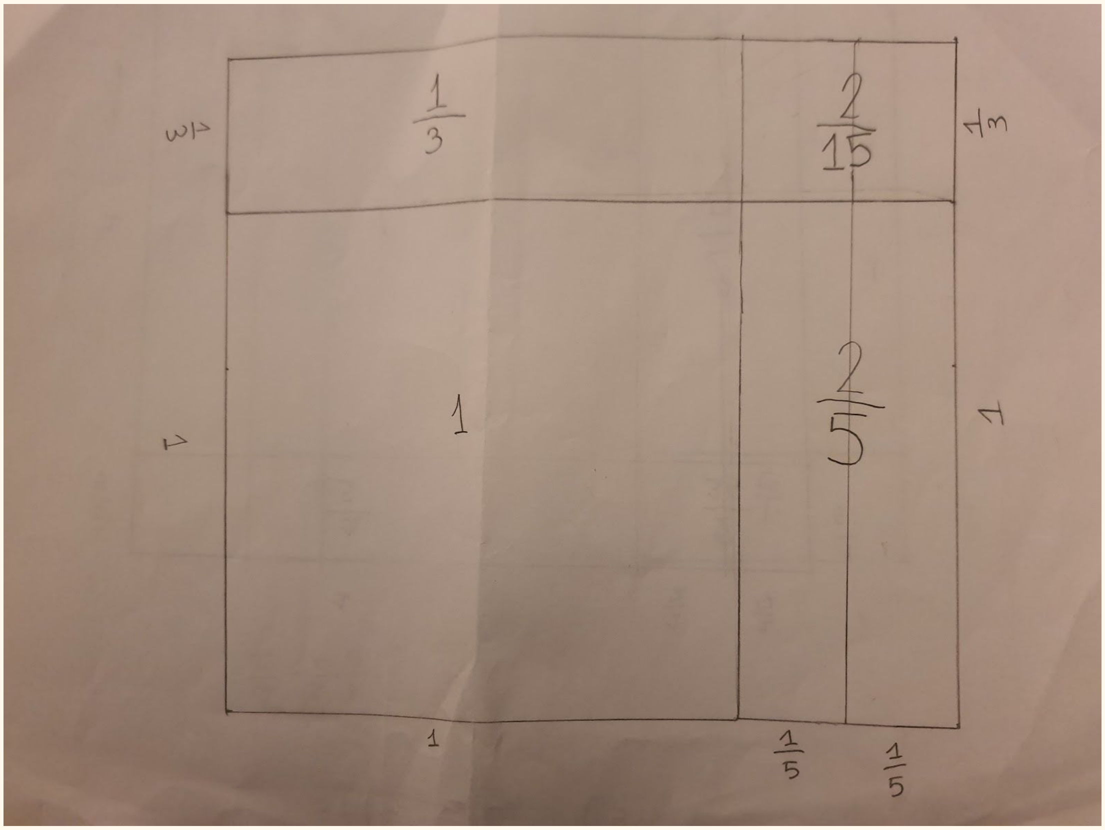
Visualizziamo così in modo geometrico la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma

$$\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)=1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\cdot 1+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=1+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{35}$$

per casa viene chiesto di realizzare un’altra moltiplicazione fra misti sull’altra facciata del foglio A3

$(1+\frac{2}{5}) * (1+\frac{1}{3})$

ecco uno dei lavori dei ragazzi



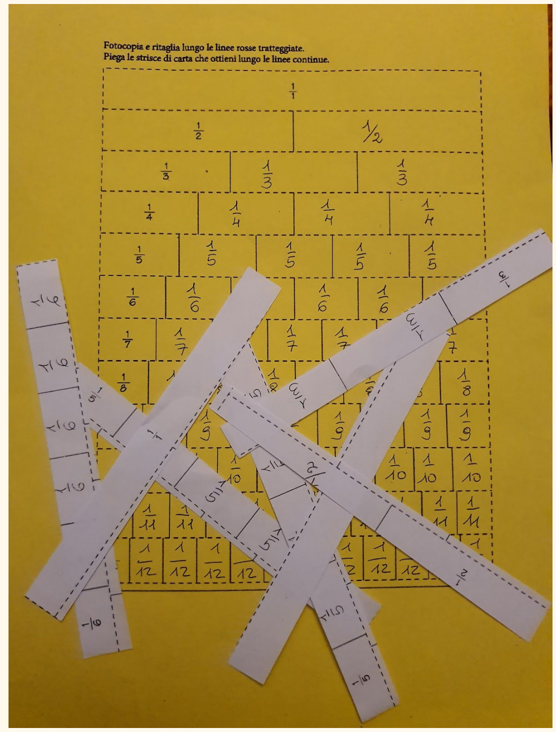
1/3
2/15
1/3
1
2/5
1
1
1
1/5
1/5

12. Divisione

a) divisione fra un rotto e un intero

per questa parte del laboratorio abbiamo usato il seguente materiale:

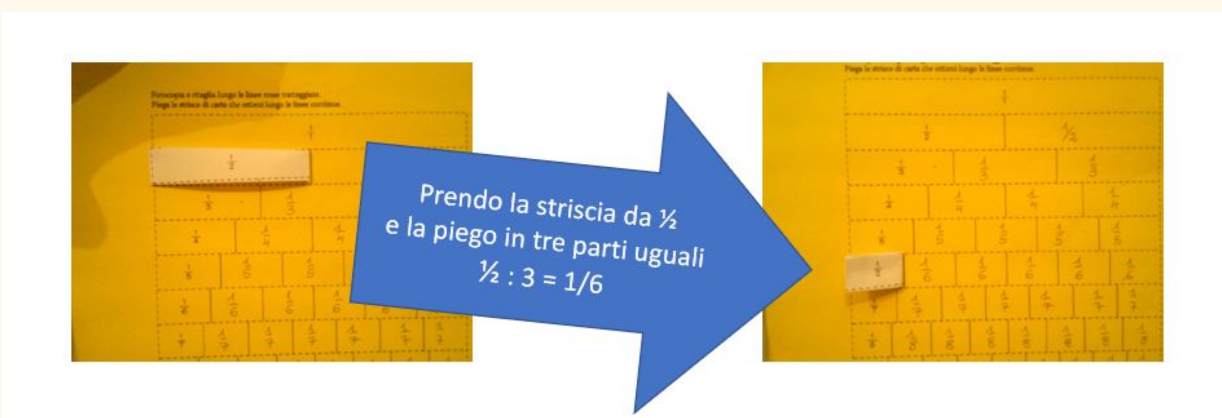
- la scheda iniziale con la suddivisione dell'unità in parti uguali
- aste in carta più facilmente manipolabili



Cominciamo con la divisione di un rotto per un intero

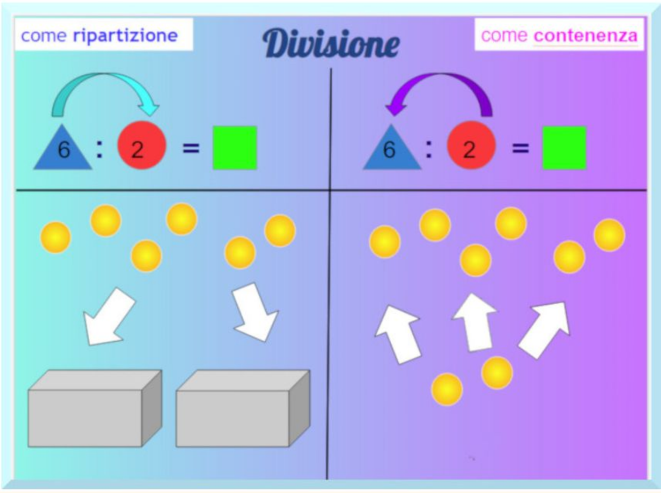
esempio: $\frac{1}{2} : 3$

prendiamo l'asta di carta corrispondente a $\frac{1}{2}$, lo pieghiamo in 3 parti uguali e troviamo nella scheda generale il rotto corrispondente, cioè $\frac{1}{6}$

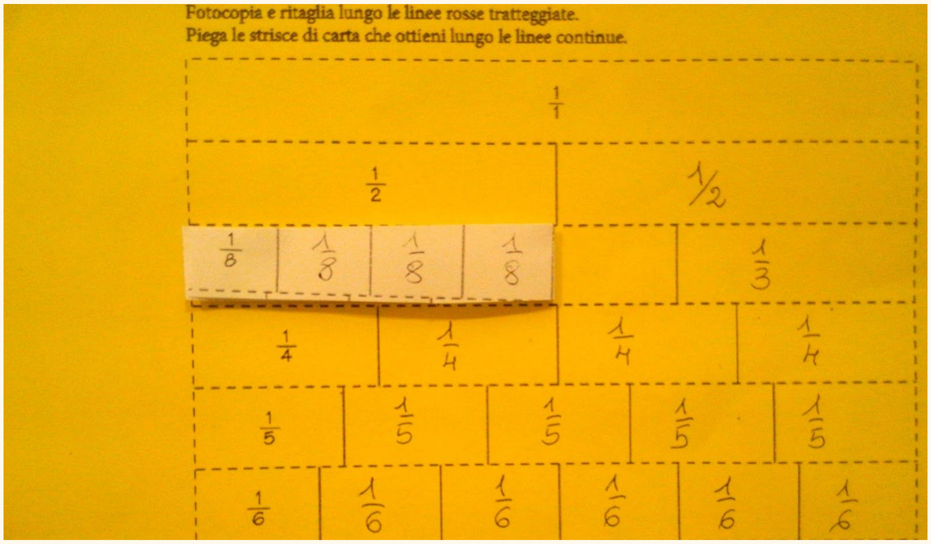


b) divisione fra rotti

per risolvere questi casi ricordiamo il concetto di divisione come contenenza:



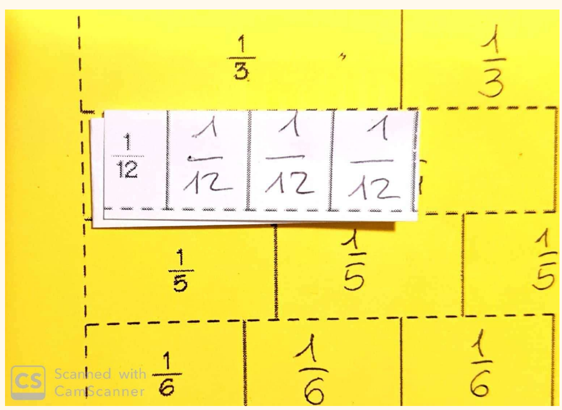
Ci chiediamo: *quante aste da* $\frac{1}{8}$ *sono contenute in* $\frac{1}{2}$*? proviamo a risolvere il quesito usando le aste*



Risolviamo cioè la divisione

$$\mathit{1/2 : 1/8 = 4}$$

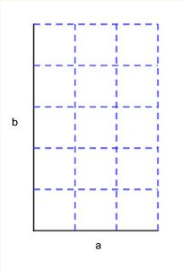
Procediamo con molti esempi differenti sia per la divisione di rotti per interi e sia nella divisione fra rotti;



$1/3 : 1/12 = 4$

$1/3 * 12 = 4$

12b. Divisione metodo geometrico



Abbiamo visto che la moltiplicazione *a x b* corrisponde geometricamente all' area A del rettangolo che ha le dimensioni *a* e *b*.

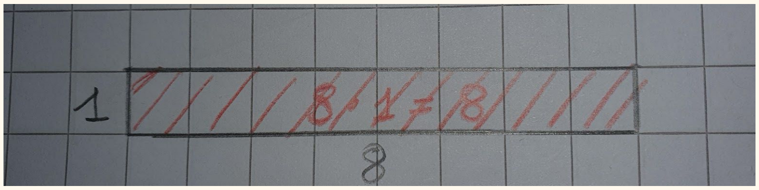
Sappiamo già dalla scuola primaria che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione ; proviamo quindi un approccio geometrico.

Cominciamo da casi semplici usando numeri interi e la carta a quadretti.

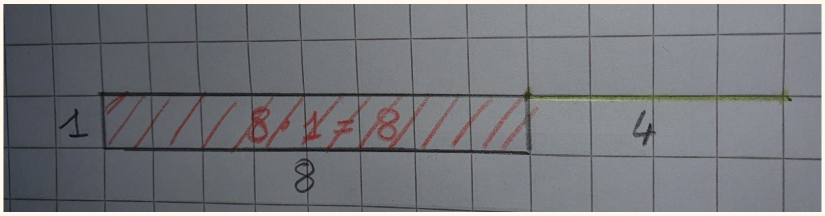
Problema: Conosciamo l'area di un rettangolo pari a 8 u^2. Vogliamo sapere qual' è la misura dell'altezza h del rettangolo di area A = 8 u^2 e base b =4u.

Risolviamo il problema geometricamente:

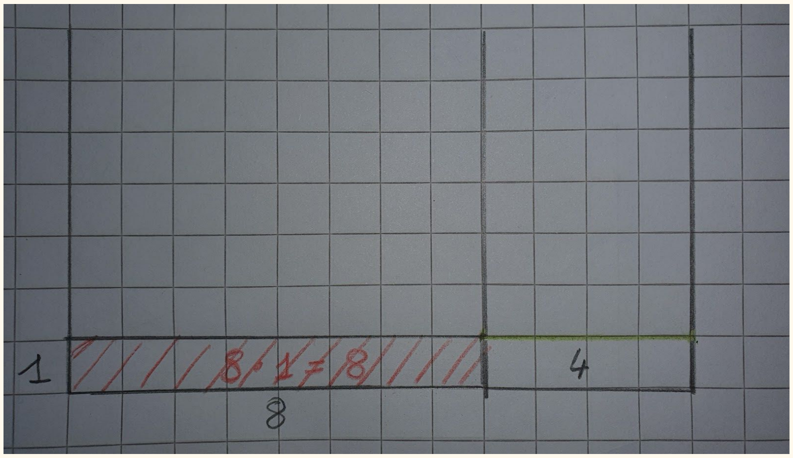
- disegniamo il rettangolo di base 8u e altezza 1u che avrà sicuramente area uguale a 8u^2



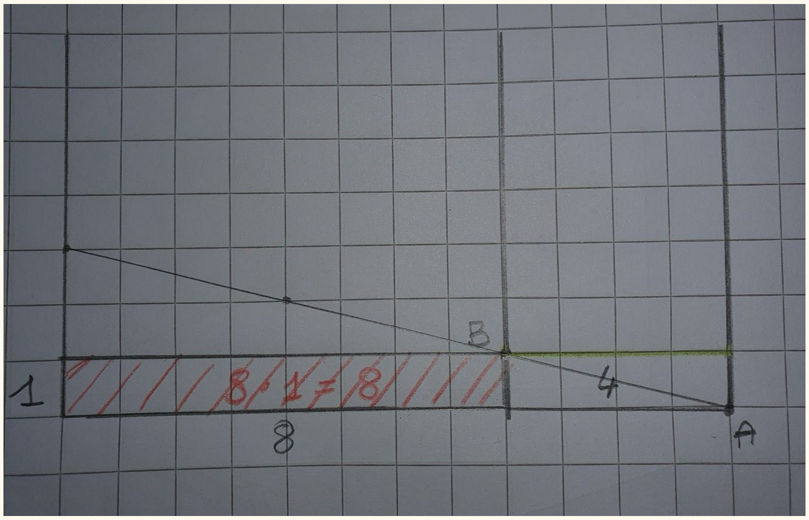
- a partire dal vertice in alto a destra disegniamo la base del rettangolo di cui vogliamo trovare l'altezza



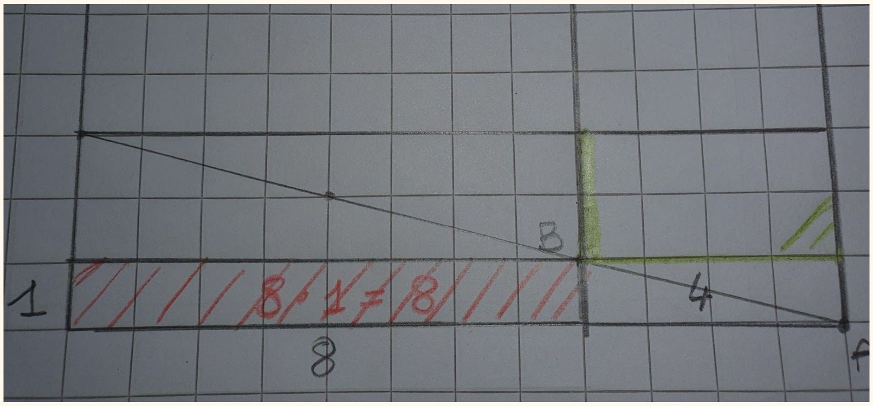
- prolunghiamo i lati del rettangolo sia orizzontalmente che verticalmente



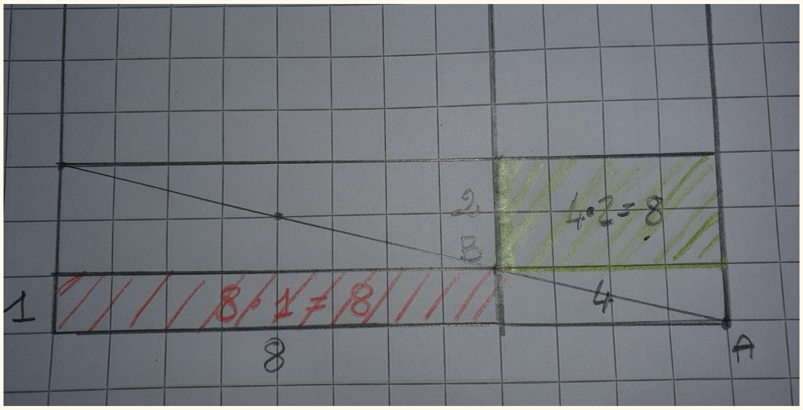
- tracciamo la retta passante per i punti A e B fino ad incontrare il prolungamento verticale del lato del rettangolo di partenza



- tracciamo la parallela alla base del rettangolo fino ad incontrare la verticale alla base passante per A e individuiamo così la seconda dimensione cercata.



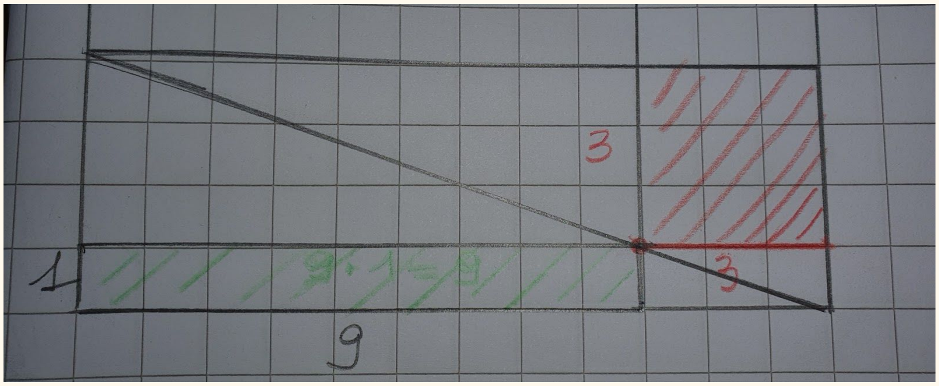
Possiamo verificare che l'area del nuovo rettangolo verde di dimensioni 4u e 2u ha area 8 u^2 sia applicando la formula della moltiplicazione sia contando i quadretti contenuti all'interno del rettangolo.



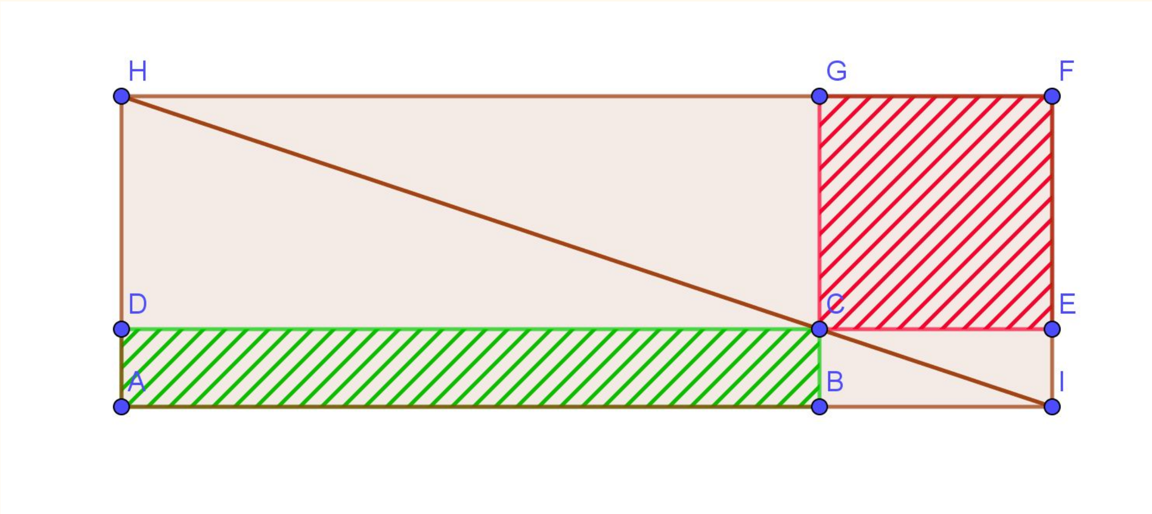
Abbiamo trovato geometricamente che

h= A : b = 8 : 4 = 2u

Ecco un altro esempio fatto in classe sempre con i numeri interi:



Con la carta a quadretti è facile verificare che le aree dei due rettangoli sono uguali, perchè come abbiamo visto basta contare i quadretti. proviamo però a dimostrarlo più in generale:



Il rettangolo grande AIFH è diviso dalla diagonale HI in due triangoli rettangoli HIF e HAI uguali perchè i lati che formano l'angolo retto sono le dimensioni del rettangolo e il terzo lato è la diagonale che è in comune;

<u>*La descrizione delle figure deve essere generale senza le misure*</u>

Il triangolo HIF è costituito da tre figure: descrivile (G1):le tre figure sono:

- *triangolo rettangolo HGC rettangolo in G*
- *quadrato GCEF*
- *triangolo CEI rettangolo in E*

Il triangolo HGC è uguale al triangolo HDC perchè (G3) la diagonale HC del rettangolo HDCG divide il rettangolo in due triangoli uguali.

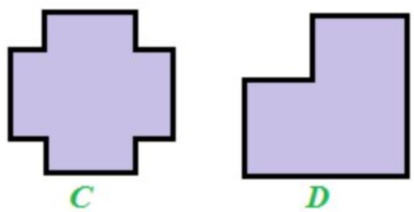
Il triangolo BCI è uguale al triangolo CEI perchè (G4) perchè il rettangolo è stato diviso da una diagonale in due parti uguali .

Vogliamo dimostrare che i due rettangoli piccoli che abbiamo costruito sono uguali perchè possono essere ottenuti come differenza di figure che hanno la stessa area.

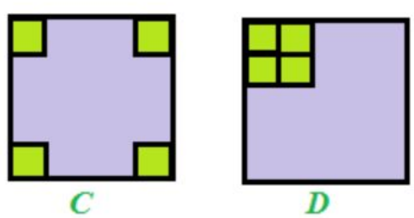
Vediamo un esempio in cui si dimostra l'equivalenza di due figure non uguali sottraendo alla stessa figura di partenza a parti uguali

Esempio.

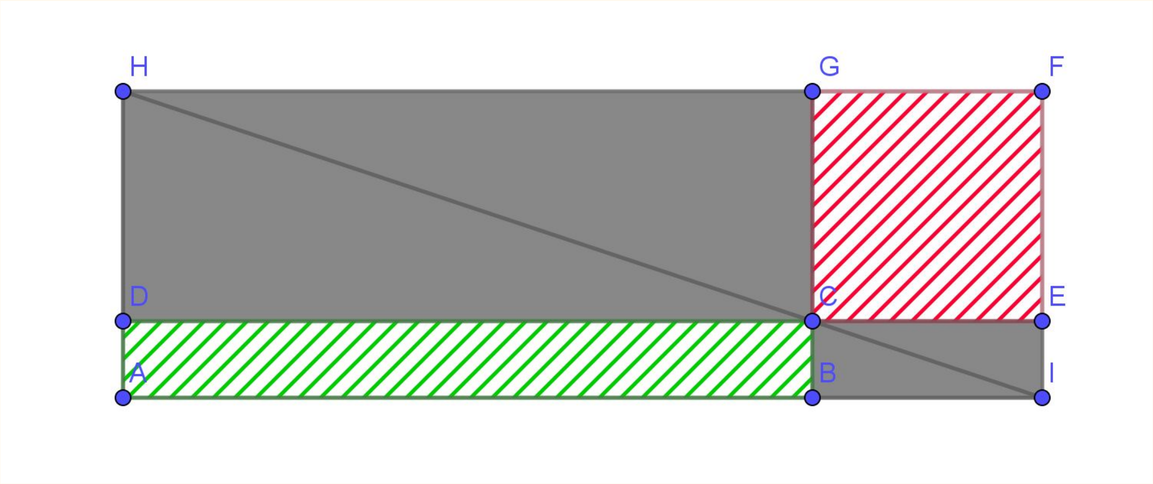
Consideriamo le due figure ***C*** e ***D*** riportate sotto:



Esse possono essere ottenute da due quadrati congruenti togliendo quattro quadratini congruenti per ogni figura. Vediamo come:



Possiamo concludere che se ad aree uguali togliamo parti di area uguale le parti rimanenti avranno l'area uguale fra loro.



Nel nostro caso il rettangolo verde sarà equivalente a quello rosso perchè dai due triangoli rettangoli grandi HIF e HAI abbiamo tolto parti uguali (parti in grigio).

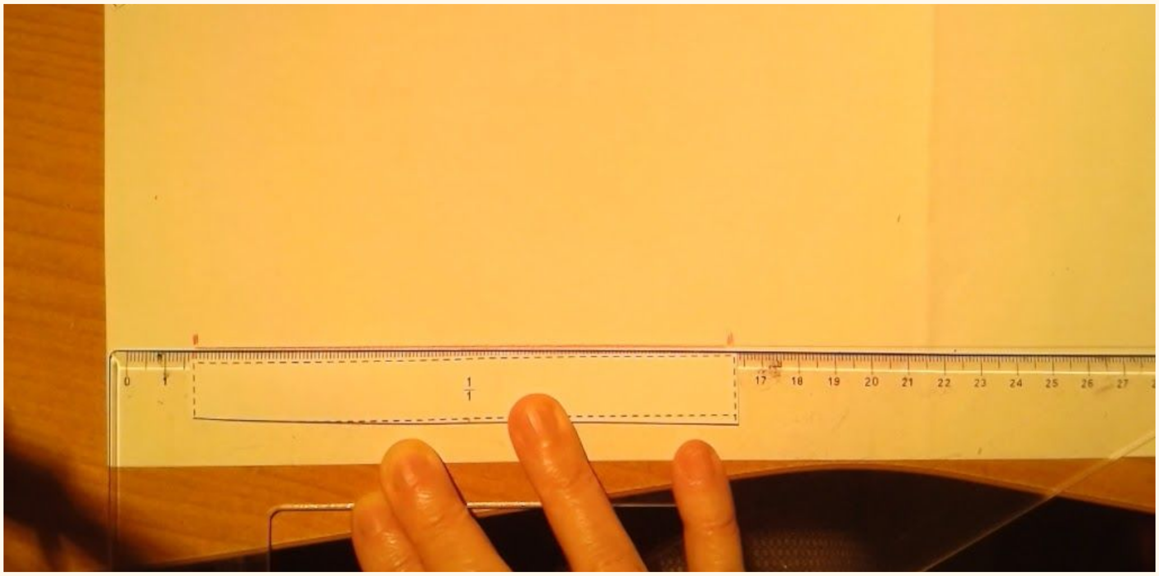
12c. Divisione fra rotti - metodo geometrico

Usando il metodo precedente proviamo ad operare una divisione fra rotti; per questo procedimento abbiamo bisogno di:

- aste
- foglio A3
- squadra grande
- matite colorate

partiamo dal seguente problema:

Trova l'altezza del triangolo di area $\frac{1}{8}$ *e base* $\frac{1}{2}$

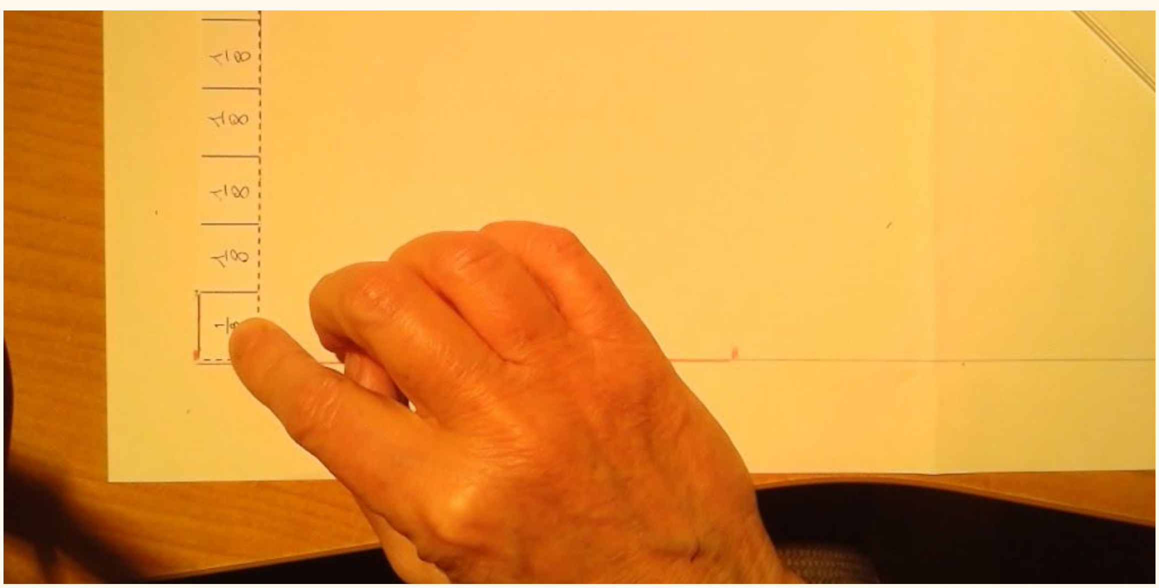


Ad ogni foto va inserita la didascalia spiegando il procedimento:

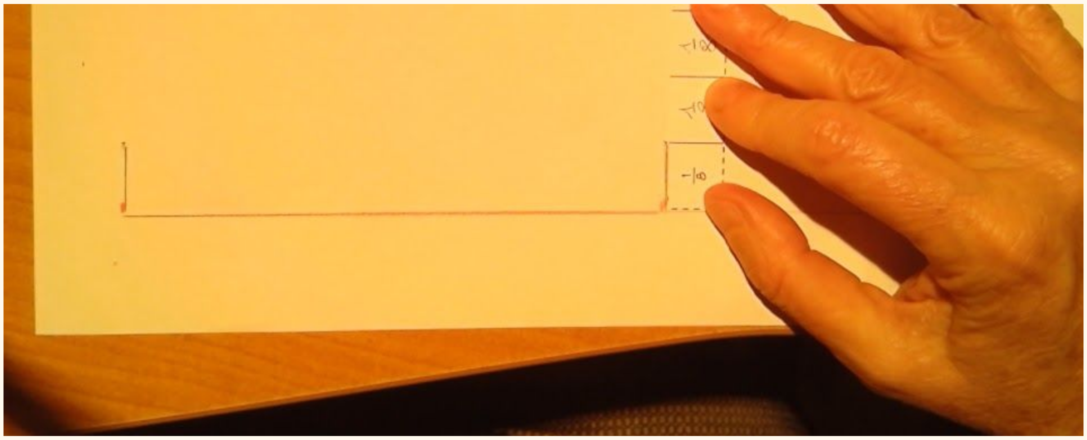
(scrivo la prima per le altre indico il gruppo che deve completare)

Cominciamo con la costruzione del rettangolo di base 1/1 e altezza ⅛ che avrà area ⅛ come richiesto dal problema

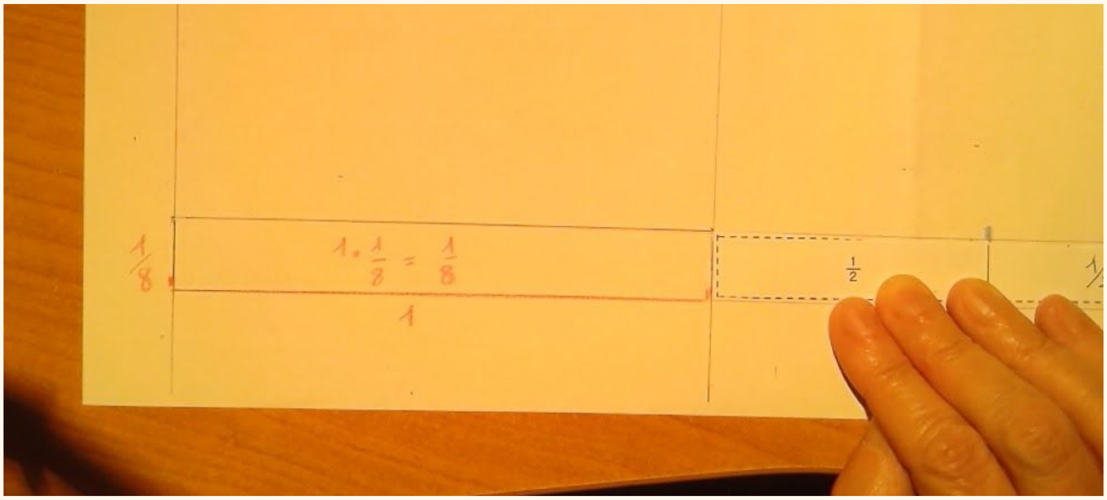
Sul foglio A3 con l'aiuto della squadra tracciamo la base del rettangolo con l'aiuto dell'asta 1/1

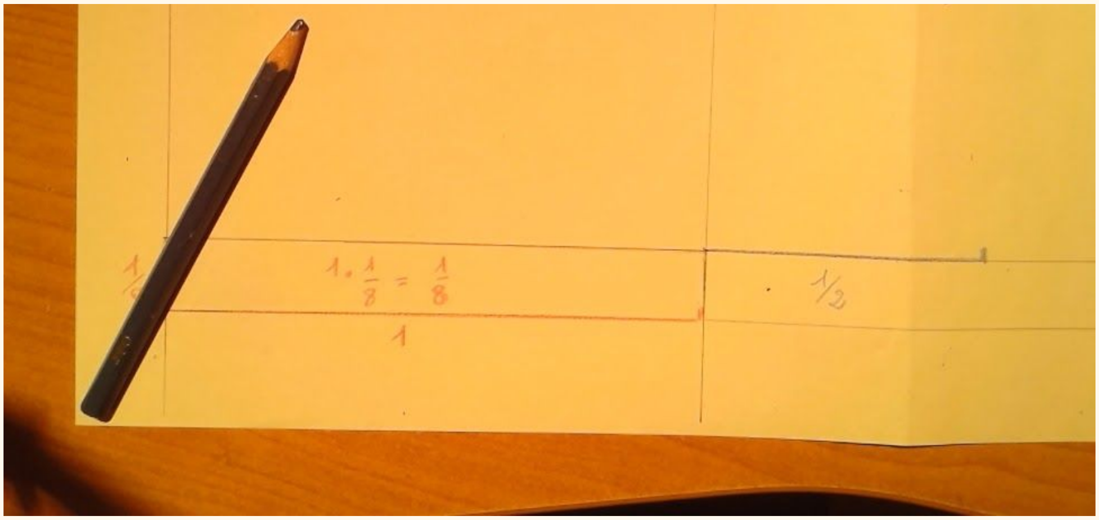


*G5 P*er costruire l’altezza dobbiamo prendere la squadra e disegnare un segmento pari a $\frac{1}{8}$

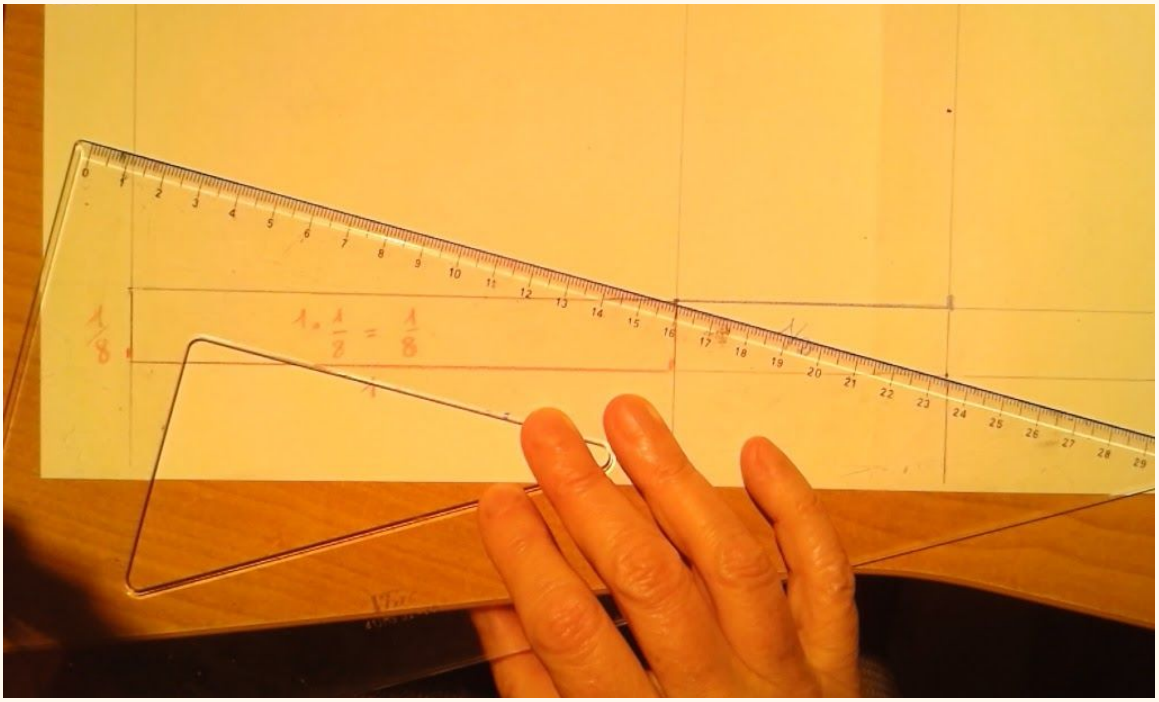


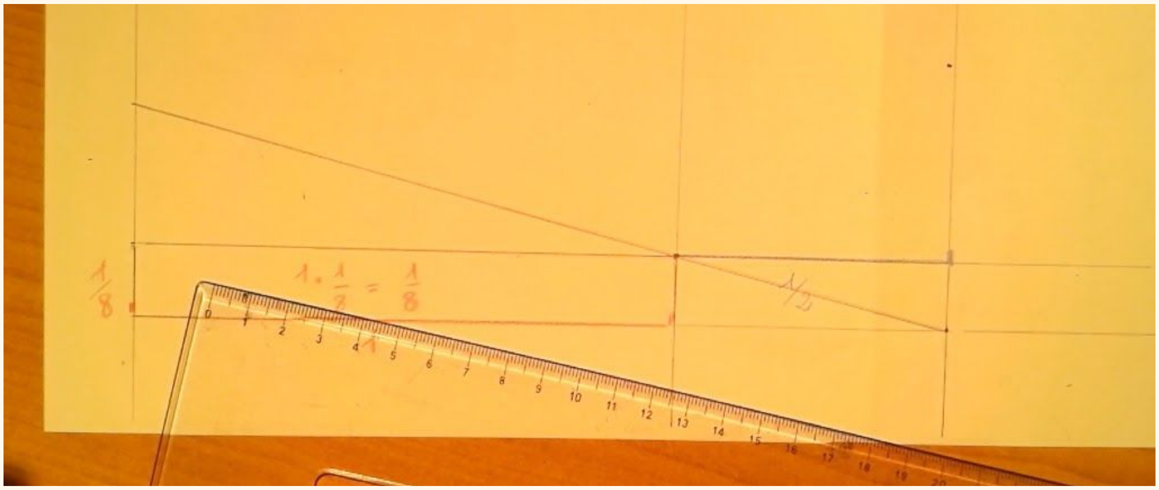
G1: sempre aiutandoci con la squadra e la riga disegnamo l`altra altezza di $\frac{1}{8}$
G2:prolunghiamo una base del segmento aiutandoci con un asta



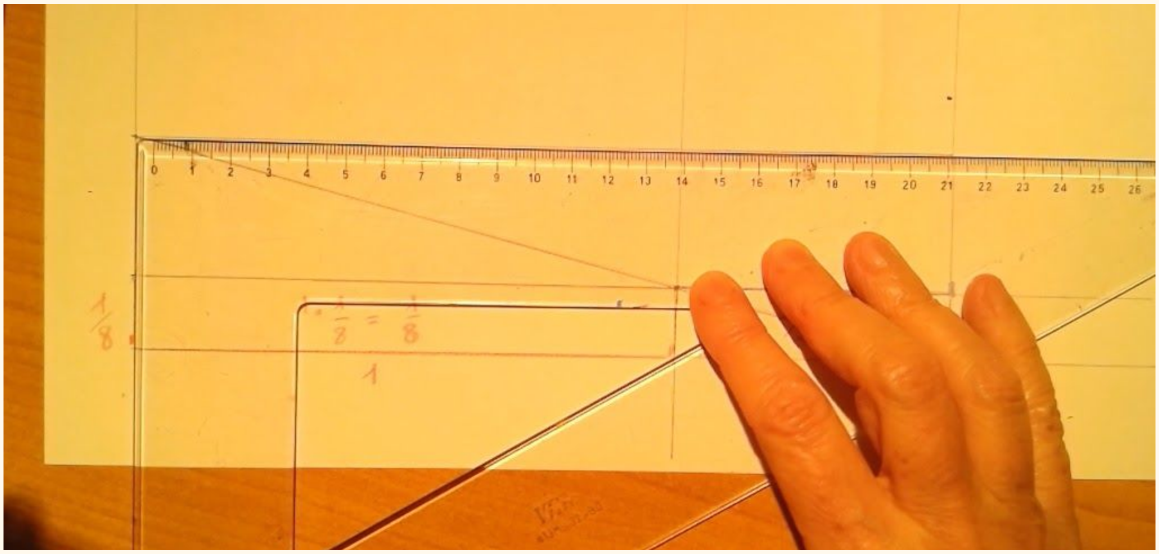


G3: Dopo aver rappresentato il rettangolo più semplice di area ⅛ che ha come dimensioni ⅛ e 1, abbiamo attaccato al rettangolo la misura delle base richiesta per i nuovo rettangolo.

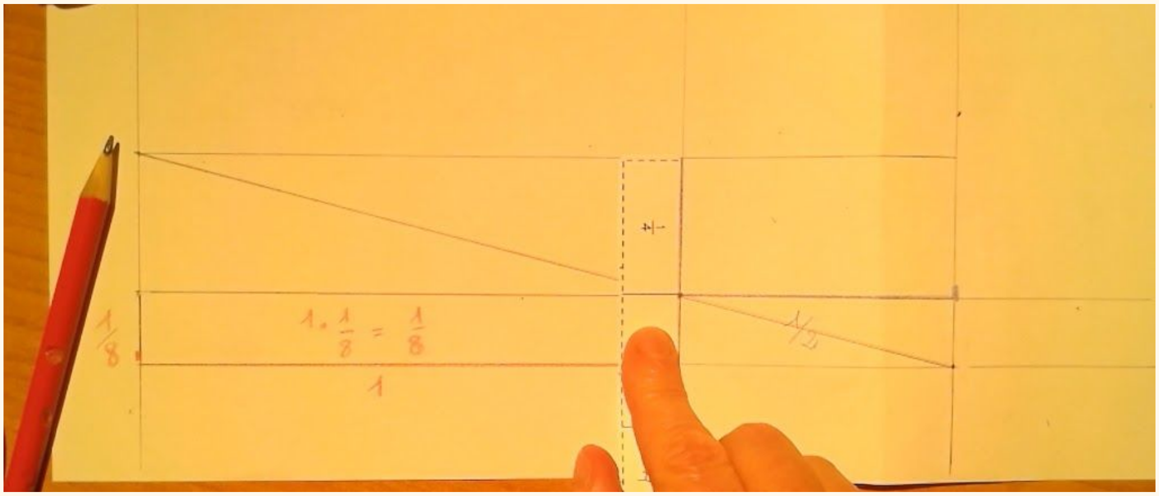




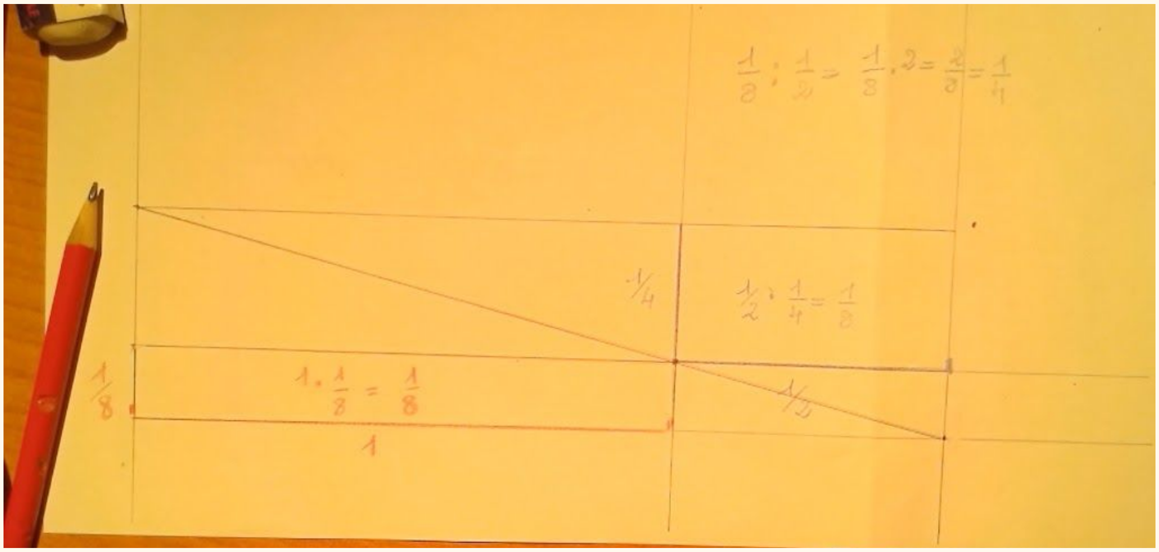
G4:Tracciamo una linea che passa per l'estremo in basso a sinistra e per l'estremo in alto a destra del rettangolo di partenza fino ad incontrare la verticale che prolunga il lato sinistro del primo rettangolo: il punto di intersezione indica l'altezza richiesta per il secondo rettangolo



G5 infine traccio una linea parallela alla base del primo rettangolo dal punto che ho trovato prima fino all'ultimo segmento (aiutandomi sempre con la squadra)



G1:ora verifico a quale frazione corrisponde l'altezza trovata in precedenza



Dopo aver trovato il valore della seconda dimensione del rettangolo proviamo a calcolare l'area :

$$b*h = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Proviamo a calcolare la misura dell'altezza con il procedimento aritmetico

$$h = A : b = \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Scriviamo quindi nuovamente la regola per dividere due frazioni:

*G1: in tutte le divisioni tra frazioni si arriva al risultato invertendo il denominatore e il numeratore della seconda frazione e sostituendo il diviso con il simbolo **

G2: nelle divisioni tra frazioni solo per la seconda frazione si inverte il denominatore con il numeratore si sostituisce il÷con il× poi si calcola come una moltiplicazione

G3: per eseguire una divisione tra due rotti bisogna, solo relativamente alla seconda frazione, scambiare il denominatore con il numeratore e poi svolgere una normale moltiplicazione.

G4: Per svolgere la divisione bisogna invertire il denominatore con il numeratore del secondo rotto ed eseguire la moltiplicazione al posto della divisione.

G5: ....
....

13. Verifica finale

Alla fine del percorso è stato somministrato alla classe un test di verifica tradizionale, del quale pubblico una delle versioni

Alunno..Data...............................

Operazioni con le frazioni

Compito A ***PUNTEGGIO TOTALE 30***

1)	Spiega come si addizionano due frazioni con lo stesso denominatore	3
2)	Quanto vale la differenza di due frazioni equivalenti? Rispondi eventualmente con un esempio	2
3)	Sommando due frazioni complementari, si ottiene una frazione particolare: a che cosa corrisponde? Fai un esempio	2
4)	Completa inserendo le seguenti parole: *termini, denominatori, ridurre , sottrarre, m.c.m. , equivalenti.* "Per sottrarre due frazioni con diversi.................... occorre: .... le frazioni ai minimi ....; trasformarle in frazioni .... aventi per denominatore il .... dei denominatori; .... i numeratori"	2

5)	Semplifica le seguenti frazioni: $\frac{4}{6}$ = ... $\frac{28}{36}$ = ...	2
6)	Riduci le seguenti frazioni al minimo comune denominatore: a) $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{6}$	2
7)	Esegui le seguenti operazioni: $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=$ $\frac{9}{8}-\frac{5}{6}=$ $\frac{2}{5}\times\frac{20}{3}=$ $\frac{11}{15}:\frac{33}{20}=$ $\left(\frac{1}{3}\right)^3=$	5
8)	Esegui la seguente espressione applicando le proprietà delle potenze **<u>senza calcolare il valore della frazione</u>**: $\frac{1}{5}\times\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^3:\left(\frac{1}{5}\right)^4$	2
9)	Esegui su un foglio a parte la seguente espressione: $\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\times\left[\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2\times\left(1-\frac{11}{27}\right)\right]:\frac{23}{10}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$	5
10	La somma delle lunghezze di due gare ciclistiche è 300 km. La prima gara è $\frac{2}{3}$ della seconda. Quanti km misura il percorso di ogni gara?	5

I risultati sono stati piuù che soddisfacenti:

- il voto minimo è stato 5,5
- 10 ragazzi pari al 40% circa della classe ha avuto un voto superiore a 9
- la media della classe è stata 8,2

certamente una valutazione importante sarà da effettuare fra qualche mese per valutare l'effettiva assimilazione degli apprendimenti.

14. Le nostre considerazioni finali

Riportiamo in forma libera alcune riflessioni dei ragazzi alla fine del percorso

Che cosa ti sembra di aver imparato bene in questo progetto?

Con questo progetto ho imparato a maneggiare molto bene le frazioni e non penso di dimenticarle più. So inoltre che quando mi serviranno le saprò usare senza dovermele ricordare.

Ho imparato a collaborare, prima non volevo partecipare, ma adesso ho imparato il lavoro di squadra

Il materiale ti è sembrato facile da usare? Avresti qualche suggerimento per migliorarlo?

Il materiale è facile da usare; le aste con denominatore piccolo (1/10, 1/12) sono troppo piccole e difficili da maneggiare

Il materiale è maneggevole, resistente e leggero, ma difficile da riordinare

Qual è stata la cosa più curiosa o più interessante?

La cosa più interessante è stata la costruzione delle operazioni; in particolare la moltiplicazione e la divisione per via geometrica e quindi la determinazione della regola.

Per me la cosa più interessante e curiosa è stato scoprire quanto erano importanti i compagni nel lavoro di gruppo

Che cosa ti è sembrato più difficile o che si potrebbe migliorare?

La divisione è stata più difficile, soprattutto fra i rotti;

l'addizione era difficile all'inizio, ma poi ce l'ho fatta

Lavorare in questo modo è diverso dalla lezione tradizionale in cui si studia sul libro e poi si fanno gli esercizi: rispetto al tipo di lavoro tradizionale elenca, secondo te:

<u>I lati positivi:</u>

- *Lavorare insieme ed essere più coinvolti ci fa imparare meglio e ci aiuta a risolvere dubbi*
- *è più divertente e si capisce meglio*
- *Sono riuscito a capire bene le cose in classe senza fare fatica a casa*
- *Capisco meglio e mi piace di più*
- *Impari più facilmente*
- *Non ci si annoia*
- *è più rilassante perché è bello lavorare in gruppo*
- *Studiare e divertirsi allo stesso tempo*

I lati negativi:

- *Non tutti lavorano nello stesso modo, con lo stesso impegno, specialmente a casa. La collaborazione non è la stessa da parte di tutti, alcuni ne approfittano per non fare niente. La collaborazione è difficile*
- *Si può pensare che quell'ora sia ricreazione, invece è un'ora di studio*
- *È difficile trovare le definizioni da soli*
- *La parte al computer (=scrittura del diario di bordo) è noiosa o difficile per problemi di connessione*
- *Siamo andati lenti ed è stato un lavoro lungo*

15. Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale va al professor Franco Ghione che ci ha permesso di partecipare a questa entusiasmante avventura e alle professoresse Silvia Cerasaro e Laura Tomassi che ,insieme alle loro classi, e con un'assidua collaborazione, ci hanno accompagnato nel nostro percorso.

Roma, 20 dicembre 2019

La classe 2H dell'IC Piazza Winckelmann e la professoressa Marina Furlani

Atzei Giulia

Battisti Chiara

Bianchi Giovanni

Cabiddu Matteo

Calandrella Lucia Maria

Carimando Angelica

Colonna Ludovico

Comande' Guido

De Nardo Matilde

Di Ielsi Angelica

Ferroni Ludovica

Folliero Emma

Galassi Matteo

Maliglig Matteo Ivan Magtibay

Nannelli Daniele

Ruggeri Arianna

Saccone Giorgia

Saccone Simone

Sisti Giulio

Tripodi Ginevra

Valeri Edoardo

Wlaz Gabriel