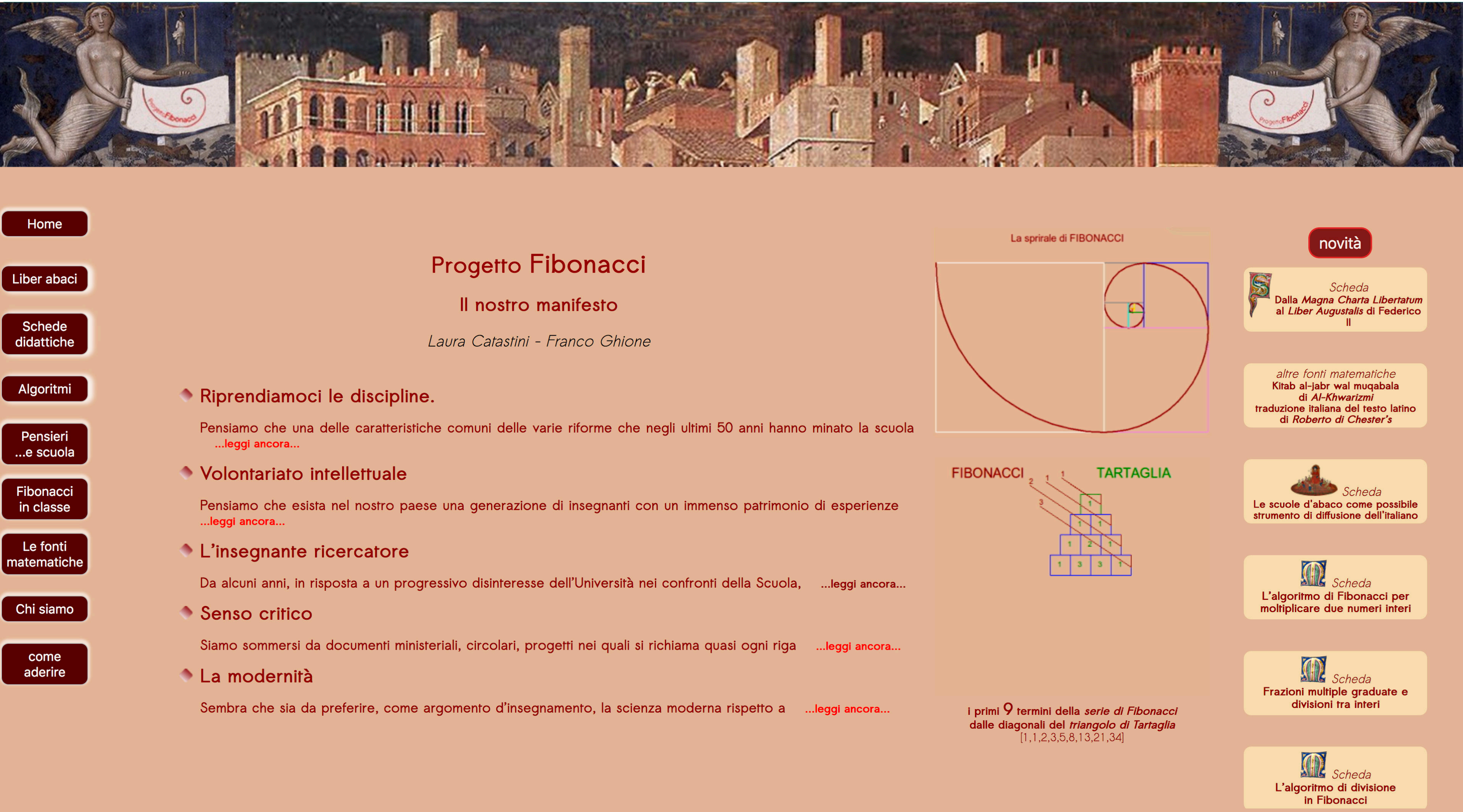
Le origini dell'Aritmetica moderna in Fibonacci.
Quali indicazioni didattiche?

Seminario del Prof. Franco Ghione

Scuola d'Autunno 2019 in didattica della matematica e delle scienze
4-6 ottobre 2019 (IV edizione)
Balletti Park Hotel, San Martino al Cimino (VT).

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
Dipartimento di Matematica



Home
Liber abaci
Schede didattiche
Algoritmi
Pensieri ...e scuola
Fibonacci in classe
Le fonti matematiche
Chi siamo
come aderire

Progetto Fibonacci

Il nostro manifesto

Laura Catastini - Franco Ghione

- Riprendiamoci le discipline.

  Pensiamo che una delle caratteristiche comuni delle varie riforme che negli ultimi 50 anni hanno minato la scuola ...leggi ancora...

- Volontariato intellettuale

  Pensiamo che esista nel nostro paese una generazione di insegnanti con un immenso patrimonio di esperienze ...leggi ancora...

- L'insegnante ricercatore

  Da alcuni anni, in risposta a un progressivo disinteresse dell'Università nei confronti della Scuola, ...leggi ancora...

- Senso critico

  Siamo sommersi da documenti ministeriali, circolari, progetti nei quali si richiama quasi ogni riga ...leggi ancora...

- La modernità

  Sembra che sia da preferire, come argomento d'insegnamento, la scienza moderna rispetto a ...leggi ancora...

La sprirale di FIBONACCI

FIBONACCI TARTAGLIA

i primi 9 termini della *serie di Fibonacci* dalle diagonali del *triangolo di Tartaglia* [1,1,2,3,5,8,13,21,34]

novità

Scheda Dalla *Magna Charta Libertatum* al *Liber Augustalis* di Federico II

altre fonti matematiche Kitab al-jabr wal muqabala di *Al-Khwarizmi* traduzione italiana del testo latino di *Roberto di Chester's*

Scheda Le scuole d'abaco come possibile strumento di diffusione dell'italiano

Scheda L'algoritmo di Fibonacci per moltiplicare due numeri interi

Scheda Frazioni multiple graduate e divisioni tra interi

Scheda L'algoritmo di divisione in Fibonacci

Le origini dell'Aritmetica moderna in Fibonacci. Quali indicazioni didattiche?

Franco Ghione

La teoria euclidea dei rapporti
Logos

Il termine *logos* utilizzato da Euclide per indicare un rapporto in senso matematico è lo stesso usato in filosofia per denotare una forma di ragionamento razionale.

A : B

Il logos (ratio, rapporto) **A** : **B** sembra essere visto come un movimento di pensiero, una qualche costruzione rigorosa, quantitativa che lega **A** a **B**, che permette di dedurre **B** da **A** o, viceversa, **A** da **B.**

La teoria euclidea dei rapporti
Analogos

Il termine *analogos* (stesso rapporto) utilizzato da Euclide per indicare l'uguaglianza tra due rapporti assume il significato più generale di **analogia** e produce un metodo potentissimo per trasferire sul terreno solido dei numeri, situazioni apparentemente lontane.

$$\mathbf{A : B = 3 : 2}$$

Il rapporto 3:2 non è il numero 1,5, ma l'abbreviazione della seguente argomentazione: se tra **A** e **B** esiste tale rapporto, allora **A** è rispetto a **B** come 3 è rispetto a 2, cioè **B** è 2 volte la terza parte di **A** o **A** è tre volte la metà di **B**.

B è una **frazione** di A

La teoria euclidea dei rapporti
Analogos

Il termine *analogos* (stesso rapporto) utilizzato da Euclide per indicare l'uguaglianza tra due rapporti assume il significato più generale di **analogia** e produce un metodo potentissimo per trasferire sul terreno solido dei numeri, situazioni apparentemente lontane.

$$\mathbf{A : B = 3 : 2}$$

Il rapporto 3:2 non è il numero 1,5, ma l'abbreviazione della seguente argomentazione: se tra **A** e **B** esiste tale rapporto, allora **A** è rispetto a **B** come 3 è rispetto a 2, cioè **B** è 2 volte la terza parte di **A** o **A** è tre volte la metà di **B**.

B è una **frazione** di A

$$B = 2\ \frac{A}{3}$$

La teoria euclidea dei rapporti
Analogos

Non è solo nella matematica che l'analogia prende forma, essa si estende, come modo di pensiero, alle diverse forme del giudizio.

Di fronte al nume è infante l'uomo, come di fronte all'uomo il fanciullo. *Eraclito*

La teoria euclidea dei rapporti
Analogos

Non è solo nella matematica che l'analogia prende forma, essa si estende, come modo di pensiero, alle diverse forme del giudizio.

Di fronte al nume è infante l'uomo, come di fronte all'uomo il fanciullo. *Eraclito*

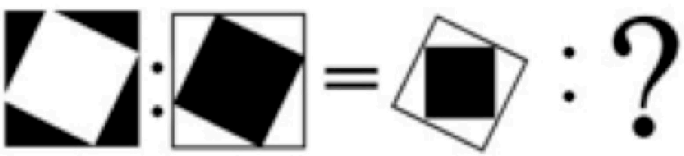
Il quadro sta al pittore come un vestito sta ...

La teoria euclidea dei rapporti
Analogos

Non è solo nella matematica che l'analogia prende forma, essa si estende, come modo di pensiero, alle diverse forme del giudizio.

Di fronte al nume è infante l'uomo, come di fronte all'uomo il fanciullo. *Eraclito*

Il quadro sta al pittore come un vestito sta ...

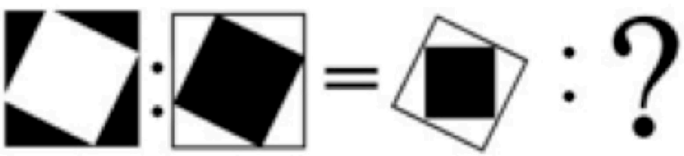


La teoria euclidea dei rapporti
Analogos

Non è solo nella matematica che l'analogia prende forma, essa si estende, come modo di pensiero, alle diverse forme del giudizio.

Di fronte al nume è infante l'uomo, come di fronte all'uomo il fanciullo. *Eraclito*

Il quadro sta al pittore come un vestito sta ...



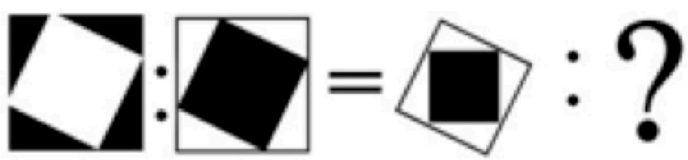
Se 2 fosse 3 cosa sarebbe 10? 2 : 10 = 3 : ?

La teoria euclidea dei rapporti
Analogos

Non è solo nella matematica che l'analogia prende forma, essa si estende, come modo di pensiero, alle diverse forme del giudizio.

Di fronte al nume è infante l'uomo, come di fronte all'uomo il fanciullo. *Eraclito*

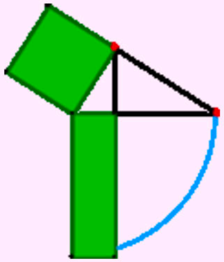
Il quadro sta al pittore come un vestito sta ...



Se 2 fosse 3 cosa sarebbe 10? 2 : 10 = 3 : ?

Essendo 10 cinque volte 2, se 2 fosse 3 10 sarebbe 5 volte 3 cioè 15.

Neuroscienze, apprendimento e didattica della matematica



Laura Catastini

http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/SSIS/Neurosc/Rapporto/Rapporto.htm

Laura Catastini
Tra parole, matematica e musica
pp. 103-127, Carocci, 2015

Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

Dato un segmento A

A

Costruire un segmento B tale che **A : B = 3 : 4**.

Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

Dato un segmento A

A

Costruire un segmento B tale che **A : B = 3 : 4**.

Dividiamo A in tre parti uguali

A

Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

Dato un segmento A

Costruire un segmento B tale che **A : B = 3 : 4**.

Dividiamo A in tre parti uguali

E prendiamo 4 di queste parti

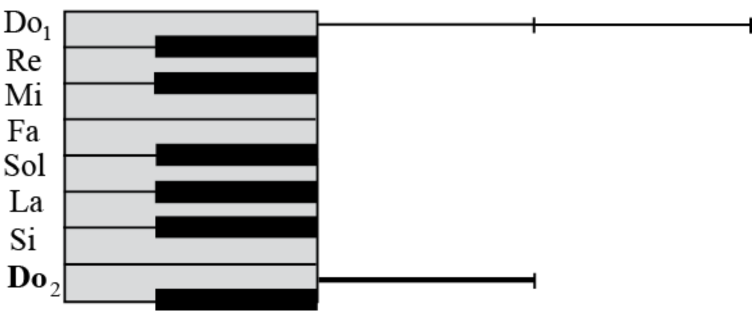
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

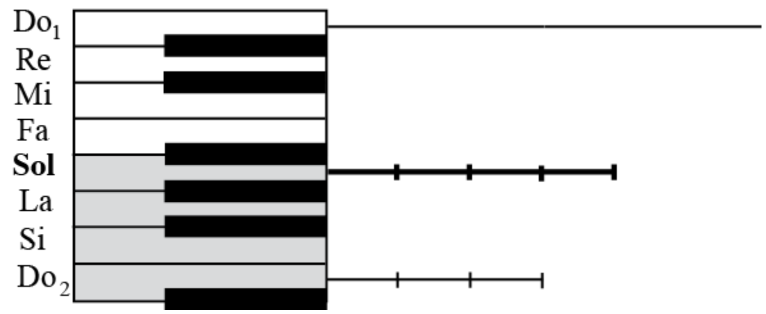
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

Intervallo di ottava Do_1 - Do_2 (rapporto 2:1)



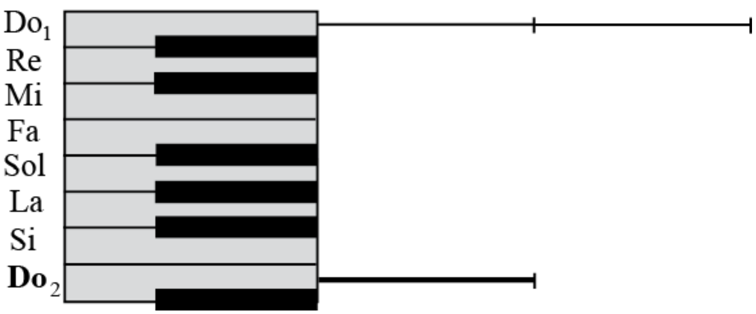
Intervallo di quarta Sol - Do_2 (rapporto 4:3)



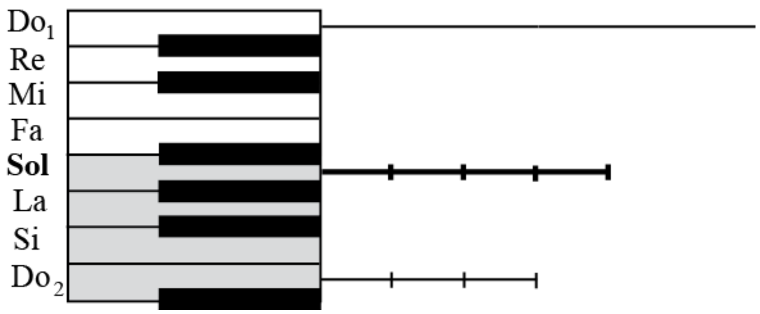
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

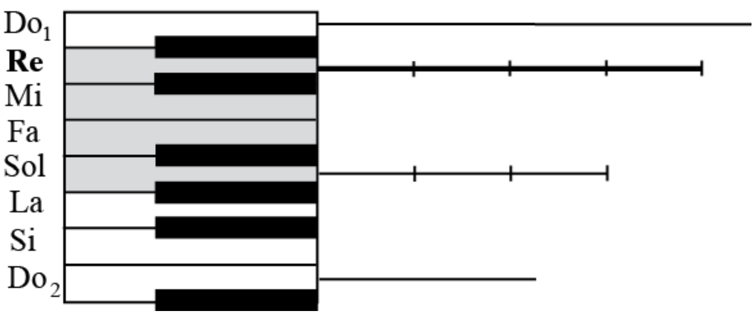
Intervallo di ottava Do_1 - Do_2 (rapporto 2:1)



Intervallo di quarta Sol - Do_2 (rapporto 4:3)



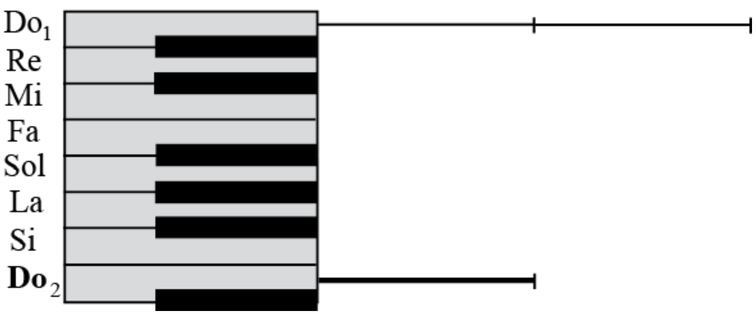
Intervallo di quarta Re - Sol (rapporto 4:3)



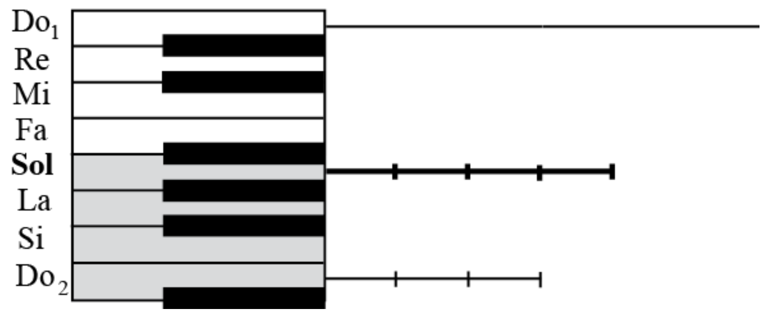
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

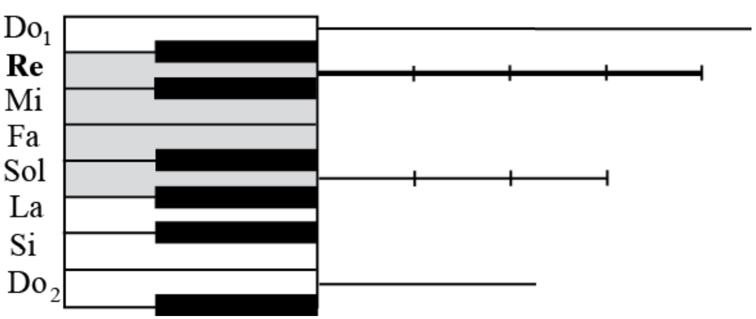
Intervallo di ottava Do_1 - Do_2 (rapporto 2:1)



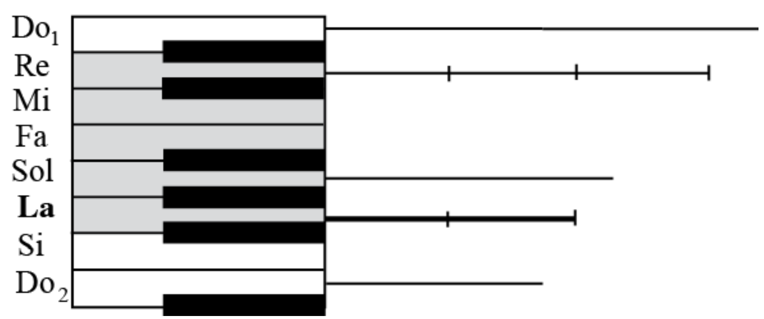
Intervallo di quarta Sol - Do_2 (rapporto 4:3)



Intervallo di quarta Re - Sol (rapporto 4:3)



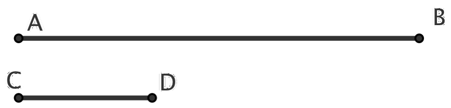
Intervallo di quinta Re - La (rapporto 3:2)



Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

Trovare il rapporto di due date grandezze omogenee.



Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

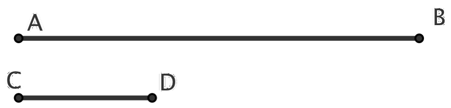
Trovare il rapporto di due date grandezze omogenee.

Vediamo quante volte CD entra in AB

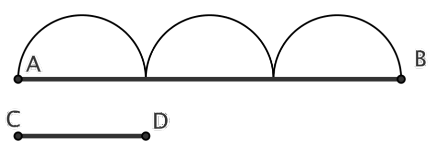
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

Trovare il rapporto di due date grandezze omogenee.



Vediamo quante volte CD entra in AB

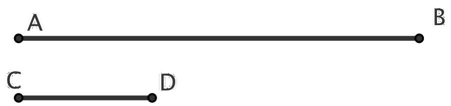


CD entra in AB tre volte senza resto

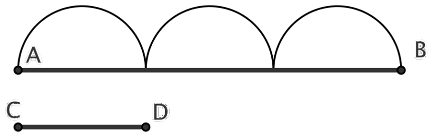
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

Trovare il rapporto di due date grandezze omogenee.



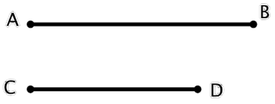
$$AB : CD = 3 : 1$$



CD entra in AB tre volte senza resto

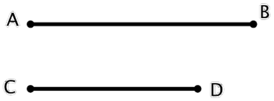
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica



Due laboratori didattici sui rapporti

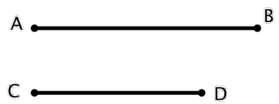
Matematica e musica



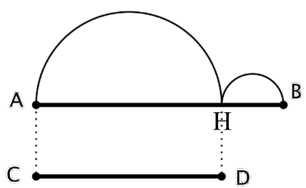
Vediamo quante volte CD entra in AB

Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica



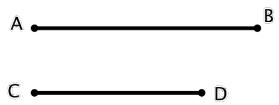
Vediamo quante volte CD entra in AB



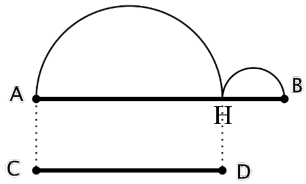
CD entra in AB una volta e resta HB

Due laboratori didattici sui rapporti

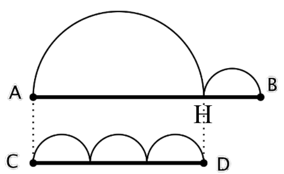
Matematica e musica



Vediamo quante volte CD entra in AB



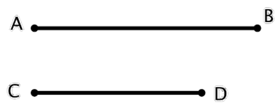
CD entra in AB una volta e resta HB

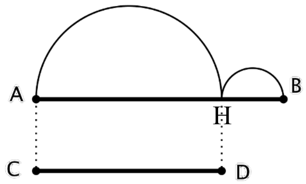


HB entra in CD 3 volte senza resto

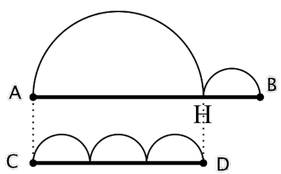
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

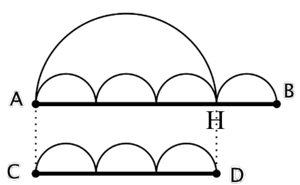




CD entra in AB una volta e resta HB

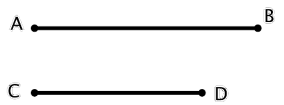


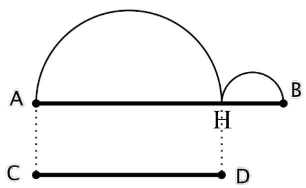
HB entra in CD 3 volte senza resto



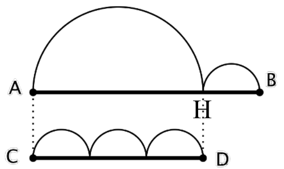
Due laboratori didattici sui rapporti

Matematica e musica

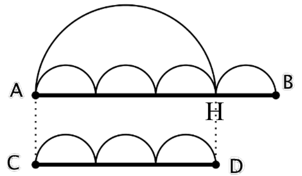




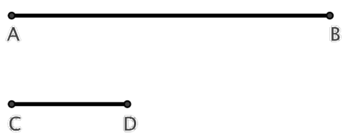
CD entra in AB una volta e resta HB

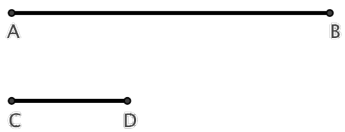


HB entra in CD 3 volte senza resto

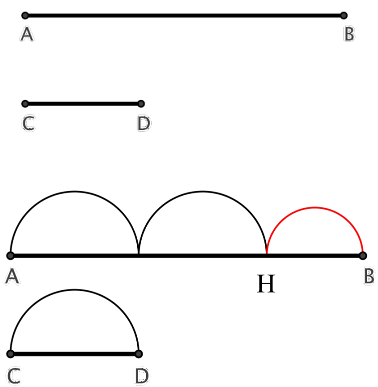


AB : CD = 4 : 3


A
B
C
D



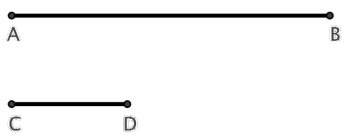
Vediamo quante volte CD entra in AB



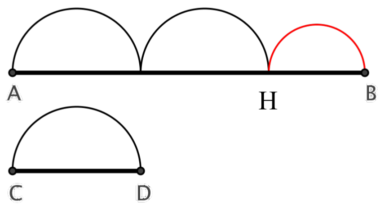
Vediamo quante volte CD entra in AB

CD entra in AB due volte e resta HB

$AB=2CD + HB \quad HB < CD$

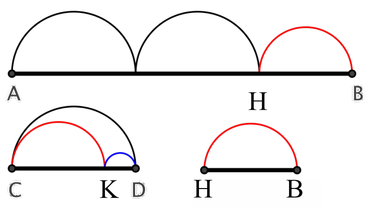


Vediamo quante volte CD entra in AB



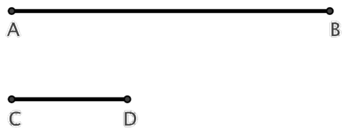
CD entra in AB due volte e resta HB

AB=2CD + HB   HB < CD

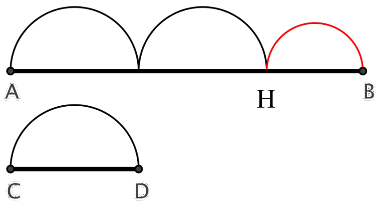


HB entra in CD una volta con resto KD

CD= HB + KD   KD < HB

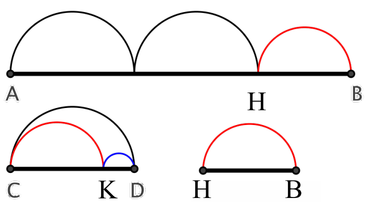


Vediamo quante volte CD entra in AB



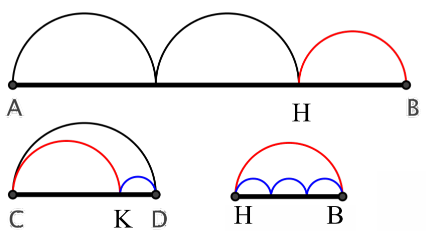
CD entra in AB due volte e resta HB

AB=2CD + HB   HB < CD



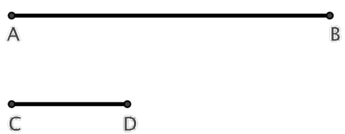
HB entra in CD una volta con resto KD

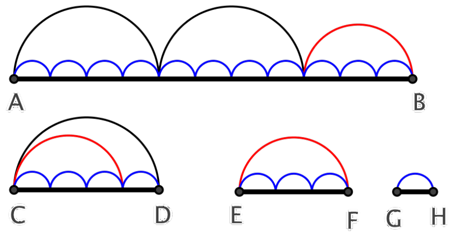
CD= HB + KD   KD < HB



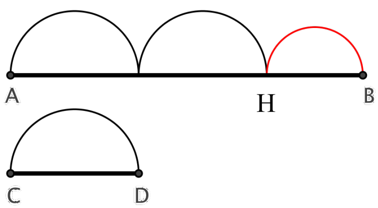
KD entra in HB 3 volte senza resto

HB=3KD



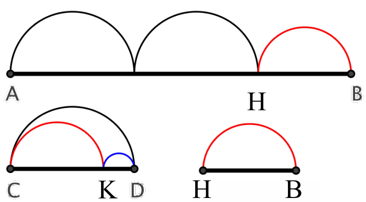


AB : CD = 11 : 4



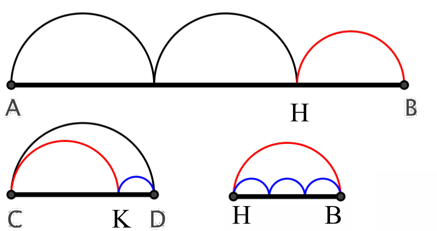
CD entra in AB due volte e resta HB

AB=2CD + HB   HB < CD



HB entra in CD una volta con resto KD

CD= HB + KD   KD < HB



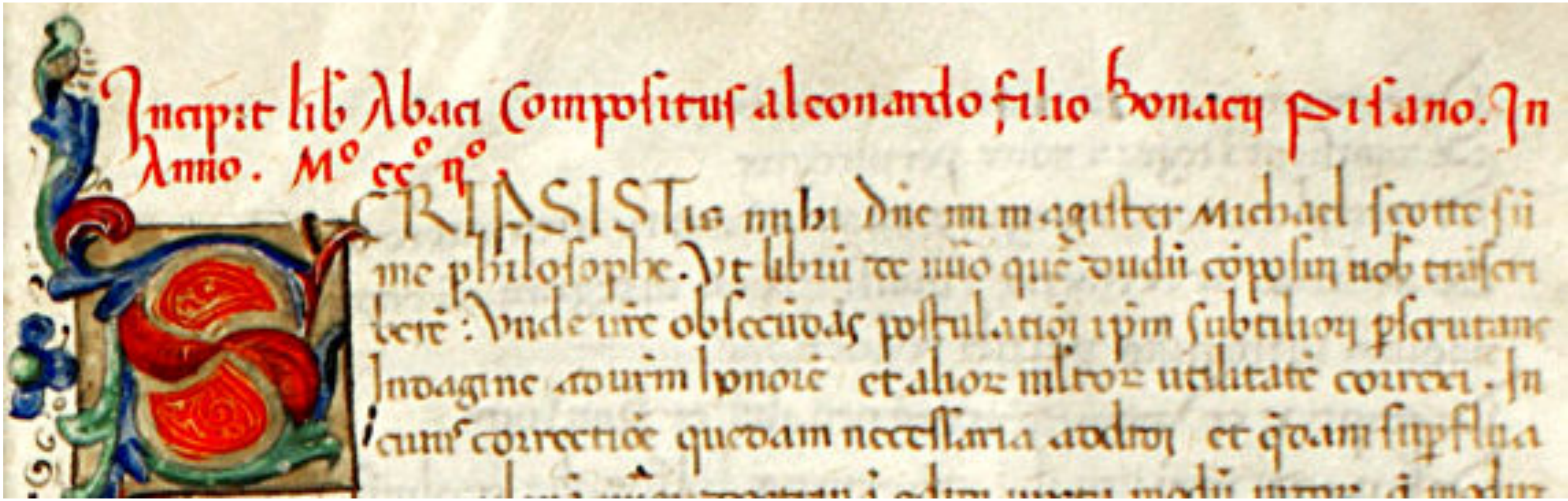
KD entra in HB 3 volte senza resto

HB=3KD

La prima pagina del liber abaci di Fibonacci

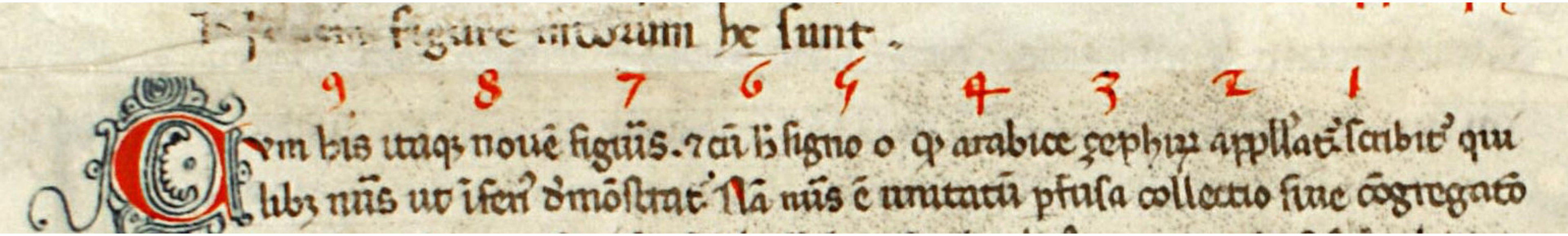
dal manoscritto
Conventi Soppressi, C1.2616
Biblioteca Nazionale Centrale
Firenze

Inizia il liber abaci composto da Leonardo figlio di Bonacci Pisano nel anno 1202



Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacii Pisano In anno M° CC° II°

I numeri interi in Fibonacci



Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cvm his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur,

Le nove figure indiane e lo **zefiro** con le quali possiamo scrivere INFINITI numeri

MI	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMMDC	MMM	MCXI	MCCXXXIIII	MMMMCCCXXI
1001	2023	3022	3020	5600	3000	1111	1234	4321

I numeri interi in Fibonacci

Con la scrittura posizionale in base 10 dei numeri interi si possono scrivere numeri giganteschi.

I numeri interi in Fibonacci

Con la scrittura posizionale in base 10 dei numeri interi si possono scrivere numeri giganteschi.

Fibonacci espone **semplici algoritmi** con i quali eseguire somme, sottrazioni (del più piccolo dal più grande) e moltiplicazioni.

I numeri interi in Fibonacci

Con la scrittura posizionale in base 10 dei numeri interi si possono scrivere numeri giganteschi.

Fibonacci espone **semplici algoritmi** con i quali eseguire somme, sottrazioni (del più piccolo dal più grande) e moltiplicazioni.

Gli algoritmi sono ricorsivi e riducono il calcolo alle **tabelline** del + e del x per le 9 figure.

I numeri interi in Fibonacci

Con la scrittura posizionale in base 10 dei numeri interi si possono scrivere numeri giganteschi.

Fibonacci espone **semplici algoritmi** con i quali eseguire somme, sottrazioni (del più piccolo dal più grande) e moltiplicazioni.

Gli algoritmi sono ricorsivi e riducono il calcolo alle **tabelline** del + e del x per le 9 figure.

A partire dalle tabelline si possono eseguire operazioni anche con **numeri molto grandi**

I numeri interi in Fibonacci

Con la scrittura posizionale in base 10 dei numeri interi si possono scrivere numeri giganteschi.

Fibonacci espone **semplici algoritmi** con i quali eseguire somme, sottrazioni (del più piccolo dal più grande) e moltiplicazioni.

Gli algoritmi sono ricorsivi e riducono il calcolo alle **tabelline** del + e del x per le 9 figure.

A partire dalle tabelline si possono eseguire operazioni anche con **numeri molto grandi**

Nascono delle nuove scuole le **scuole d'abaco** dove si insegna in nuovo calcolo

I numeri interi in Fibonacci

Con la scrittura posizionale in base 10 dei numeri interi si possono scrivere numeri giganteschi.

Fibonacci espone **semplici algoritmi** con i quali eseguire somme, sottrazioni (del più piccolo dal più grande) e moltiplicazioni.

Gli algoritmi sono ricorsivi e riducono il calcolo alle **tabelline** del + e del x per le 9 figure.

A partire dalle tabelline si possono eseguire operazioni anche con **numeri molto grandi**

Nascono delle nuove scuole le **scuole d'abaco** dove si insegna in nuovo calcolo

Il calcolo è **scritto, inopinabile** e ognuno può controllarne l'esattezza.

I numeri interi in Fibonacci

Con la scrittura posizionale in base 10 dei numeri interi si possono scrivere numeri giganteschi.

Fibonacci espone **semplici algoritmi** con i quali eseguire somme, sottrazioni (del più piccolo dal più grande) e moltiplicazioni.

Gli algoritmi sono ricorsivi e riducono il calcolo alle **tabelline** del + e del x per le 9 figure.

A partire dalle tabelline si possono eseguire operazioni anche con **numeri molto grandi**

Nascono delle nuove scuole le **scuole d'abaco** dove si insegna in nuovo calcolo

Il calcolo è **scritto, inopinabile** e ognuno può controllarne l'esattezza.

Si apre la strada **a commerci su grande scala**: dalla Spagna, alla Provenza, al Nord Africa, alla Siria, all'estremo oriente.

I numeri interi in Fibonacci

Le figure primacciane (della Prima C)

1 2 3 4 0

I numeri interi in Fibonacci

Le figure “primacciane” (della Prima C)

1 2 3 4 0

Tutti i numeri si possono scrivere con queste 4 figure
e il sole che rappresenta lo zero.

Si impara a scrivere i numeri in base 5

I numeri interi in Fibonacci

Le figure primacciane (della Prima C)

1 2 3 4 0

Tutti i numeri si possono scrivere con queste 4 figure e il sole che rappresenta lo zero.

Si impara a scrivere i numeri in base 5

2 3 3

tre unità + tre cinquine + due venticinquine

I numeri interi in Fibonacci

Le figure primacciane (della Prima C)

1 2 3 4 0

Tutti i numeri si possono scrivere con queste 4 figure
e il sole che rappresenta lo zero.

Si impara a scrivere i numeri in base 5

2 3 3

tre unità + tre cinquine + due venticinquine 68

I numeri interi in Fibonacci

Le figure primacciane (della Prima C)

1 2 3 4 0

Le tabelline

I numeri interi in Fibonacci

Le figure primacciane (della Prima C)

1 2 3 4 0

Le tabelline

La tabellina del +

I numeri interi in Fibonacci

Le figure primacciane (della Prima C)

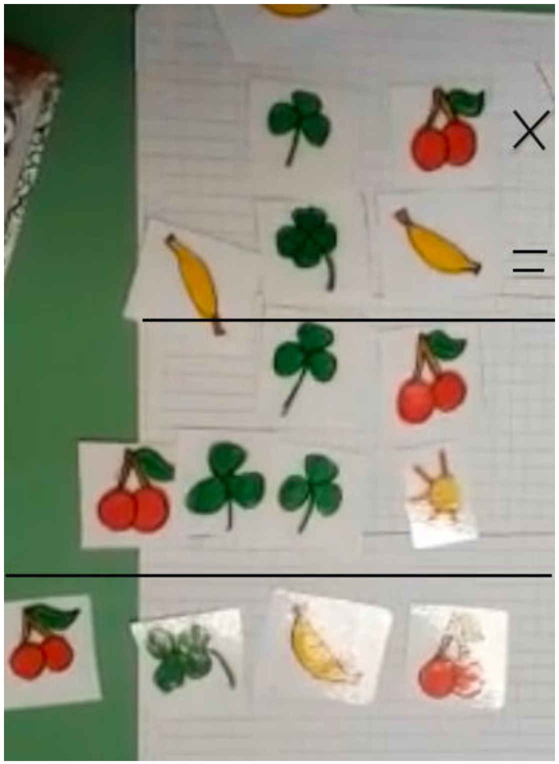
1 2 3 4 0

Le tabelline

La tabellina del +

La tabellina del x

I numeri interi in Fibonacci



L'algoritmo moltiplicativo

Trifoglio ciliegia x
<u>Quadrifoglio banana =</u>
Ciliegia quadrifoglio banana ciliegia

(3 cinquine e 2 unità) per (4 cinquine e 1 unità) fa 2 centoventicinquine e 4 venticinquine e 1 cinquina e 2 unità

$$(3 \times 5 + 2) \times (4 \times 5 + 1) = 2 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2$$

I numeri interi non bastano

Con Fibonacci l'aritmetica indiana e araba penetra nel mondo latino

Cambia il **significato di numero** : per Euclide il numero è una *pluralità di unità*.

I numeri interi non bastano

Con Fibonacci l’aritmetica indiana e araba penetra nel mondo latino

Cambia il **significato di numero** : per Euclide il numero è una *pluralità di unità*.

La **ennesima parte di 1** si pensa come un numero con un suo simbolo e una sua aritmetica.

I numeri interi non bastano

Con Fibonacci l’aritmetica indiana e araba penetra nel mondo latino

Cambia il **significato di numero** : per Euclide il numero è una *pluralità di unità*.

La **ennesima parte di 1** si pensa come un numero con un suo simbolo e una sua aritmetica.

L’intero si “rompe” in parti uguali e nascono i **numeri rotti** e un modo simbolico per scriverli

I numeri interi non bastano

Con Fibonacci l'aritmetica indiana e araba penetra nel mondo latino

Cambia il **significato di numero** : per Euclide il numero è una *pluralità di unità*.

La **ennesima parte di 1** si pensa come un numero con un suo simbolo e una sua aritmetica.

L'intero si "rompe" in parti uguali e nascono i **numeri rotti** e un modo simbolico per scriverli

Nasce un nuovo insieme numerico che oggi chiamiamo l'insieme dei **numeri razionali** positivi

I numeri interi non bastano

Con Fibonacci l'aritmetica indiana e araba penetra nel mondo latino

Cambia il **significato di numero** : per Euclide il numero è una *pluralità di unità*.

La **ennesima parte di 1** si pensa come un numero con un suo simbolo e una sua aritmetica.

L'intero si "rompe" in parti uguali e nascono i **numeri rotti** e un modo simbolico per scriverli

Nasce un nuovo insieme numerico che oggi chiamiamo l'insieme dei **numeri razionali** positivi

Vengono elaborati **nuovi algoritmi** per eseguire le operazioni aritmetiche coi nuovi numeri.

I numeri interi non bastano

Con Fibonacci l'aritmetica indiana e araba penetra nel mondo latino

Cambia il **significato di numero** : per Euclide il numero è una *pluralità di unità*.

La **ennesima parte di 1** si pensa come un numero con un suo simbolo e una sua aritmetica.

L'intero si "rompe" in parti uguali e nascono i **numeri rotti** e un modo simbolico per scriverli

Nasce un nuovo insieme numerico che oggi chiamiamo l'insieme dei **numeri razionali** positivi

Vengono elaborati **nuovi algoritmi** per eseguire le operazioni aritmetiche coi nuovi numeri.

Il conetto stesso di **moltiplicazione** e **divisione** cambia radicalmente significato.

I numeri interi non bastano

Con Fibonacci l'aritmetica indiana e araba penetra nel mondo latino

Cambia il **significato di numero** : per Euclide il numero è una *pluralità di unità*.

La **ennesima parte di 1** si pensa come un numero con un suo simbolo e una sua aritmetica.

L'intero si "rompe" in parti uguali e nascono i **numeri rotti** e un modo simbolico per scriverli

Nasce un nuovo insieme numerico che oggi chiamiamo l'insieme dei **numeri razionali** positivi

Vengono elaborati **nuovi algoritmi** per eseguire le operazioni aritmetiche coi nuovi numeri.

Il conetto stesso di **moltiplicazione** e **divisione** cambia radicalmente significato.

La nuova aritmetica verrà trasferita in **campo geometrico** semplificando drasticamente
I metodi euclidei

I nuovi numeri in Fibonacci

Dividiamo l'unità in *n* pezzi **uguali** e sommiamo m pezzi

Liber Abaci

CAPITOLO QUINTO

Per accedere al testo latino dei singoli paragrafi cliccare sul numero del paragrafo.

Per accedere al testo dell'intero capitolo cliccare su *Testo latino.*

pagina iniziale del capitolo

(V.2) Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato [*denominatore*] e quello superiore è chiamato denominante [*numeratore*] [NdT] . Così se sopra al numero 2 sia stata tracciata una linea, e sopra di essa sia scritta l'unità, questa unità attesta una parte delle due parti dell'uno intero, cioè la metà così: $\frac{1}{2}$ e se l'unità fosse stata posta sopra al numero 3 così: $\frac{1}{3}$ denota la terza [*parte*]; e se sopra al numero 7 così: $\frac{1}{7}$ la settima; e se sopra al 10, la decima, e se sopra al 19, intende una diciannovesima parte dell'uno intero, e così di seguito. Ancora se 2 è stato messo sopra il 3 così , $\frac{2}{3}$ intende due parti delle tre parti dell'uno intero, cioè due terzi. E se è sopra il 7 due settimi così: $\frac{2}{7}$ e se sopra il 23 indicheranno due ventitreesimi, e così via. Ancora se il sette sia stato posto sopra il nove così , $\frac{7}{9}$ indica sette noni dell'uno intero; e se il sette è sopra il 97, denoterà sette novantasettesimi. Ancora il 13 posto sopra il 29, indica tredici ventinovesimi. E se 13 è sopra 347, indicherà tredici trecentoquarantasettesimi, e così è da intendere per i restanti numeri.

Il significato di numeratore e denominatore.

Numeratore

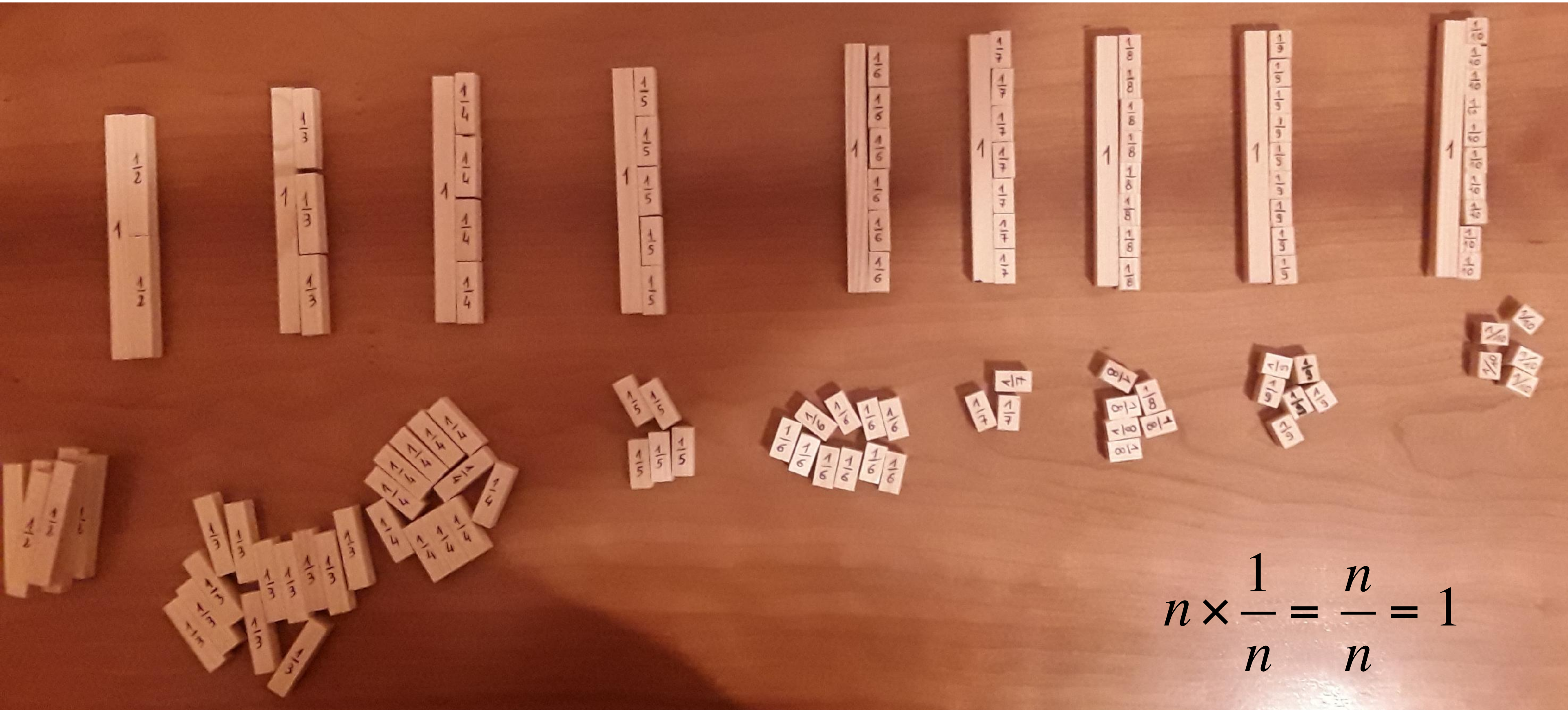
Denominatore

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = m \times \frac{1}{n} \qquad m < n$$

I **numeri rotti** oggi chiamati frazioni proprie

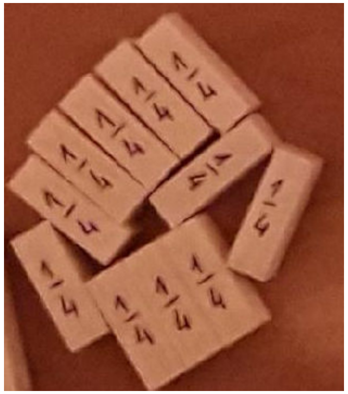
I numeri rotti in Fibonacci

Gli ennesimi



$$n \times \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Ogni asta ha un suo denominatore, una sua denominazione



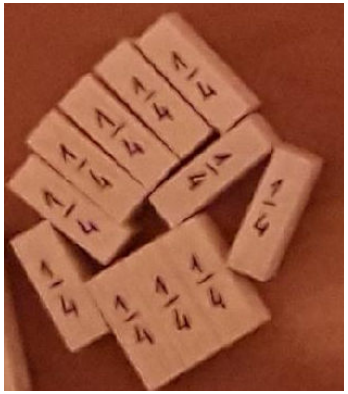
I quarti: aste di denominazione 4

I quinti: aste di denominazione 5

I terzi: aste di denominazione 3

I nuovi *numeri* si rappresentano con una fila di aste.
Una **frazione** è una fila di aste con la stessa denominazione

Ogni asta ha un suo denominatore, una sua denominazione



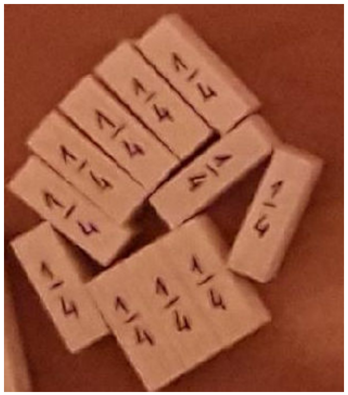
I quarti: aste di denominazione 4

I quinti: aste di denominazione 5

I terzi: aste di denominazione 3

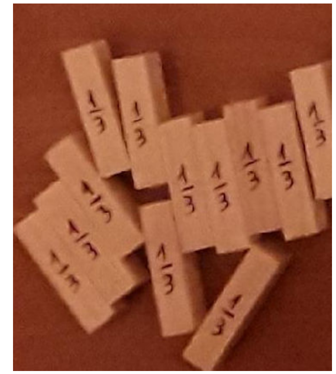
I nuovi *numeri* si rappresentano con una fila di aste.
Una **frazione** è una fila di aste con la stessa denominazione
Un numero è **uguale** a un altro se le due file hanno la stessa lunghezza.

Ogni asta ha un suo denominatore, una sua denominazione



I quarti: aste di denominazione 4

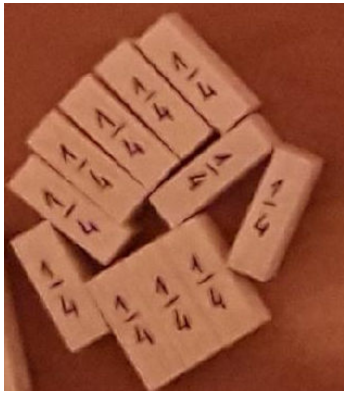
I quinti: aste di denominazione 5



I terzi: aste di denominazione 3

I nuovi *numeri* si rappresentano con una fila di aste.
Una **frazione** è una fila di aste con la stessa denominazione
Un numero è **uguale** a un altro se le due file hanno la stessa lunghezza.
Un numero è **maggiore** di un altro se la sua fila è più lunga dell'altra.

Ogni asta ha un suo denominatore, una sua denominazione



I quarti: aste di denominazione 4

I quinti: aste di denominazione 5

I terzi: aste di denominazione 3

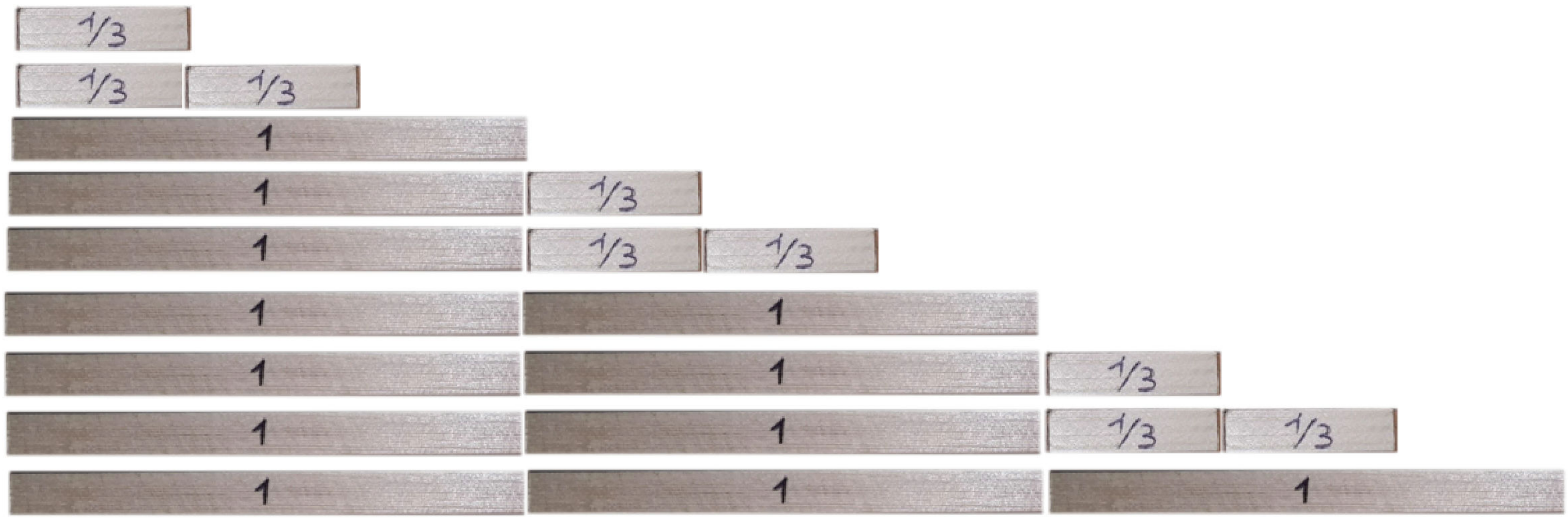
I nuovi *numeri* si rappresentano con una fila di aste.
Una **frazione** è una fila di aste con la stessa denominazione
Un numero è **uguale** a un altro se le due file hanno la stessa lunghezza.
Un numero è **maggiore** di un altro se la sua fila è più lunga dell'altra.

Teorema

Ogni fila finita di aste della stessa denominazione o di denominazioni diverse è uguale a un certo numero di unità più un solo numero rotto.

I *numeri* formati con i terzi

1/3
2/3
3/3=1
4/3=1 1/3
5/3=1 2/3
6/3=2
7/3=2 1/3
8/3=2 2/3
9/3=3



Ad esempio 31 terzi è uguale a 30 terzi più un terzo ma 30 terzi è uguale a 10 unità e dunque 31 terzi è uguale a 10 unità più 1 terzo. Fibonacci e tutti i suoi successori scrivono questo *numero* nella **forma mista** sotto intendendo il segno +

$$\frac{31}{3} = 10\ \frac{1}{3}$$

Che si legge:
31 diviso 3 è uguale a 10 e un terzo

I *numeri* formati con gli ennesimi

Il numero $\frac{m}{n}$ cioè *m* ennesimi si calcola **dividendo** *m* per *n*

$$m = q \times n + r \qquad (0 \leq r < n)$$

Dato che n ennesimi fanno 1, q × n ennesimi fanno q interi
degli m ennesimi i primi q × n daranno q unità e resteranno da sommare gli altri r ennesimi

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$$

I *numeri* formati con gli ennesimi

Il numero $\frac{m}{n}$ cioè *m* ennesimi si calcola **dividendo** *m* per *n*

$$m = q \times n + r \qquad (0 \leq r < n)$$

Dato che n ennesimi fanno 1, q × n ennesimi fanno q interi
degli m ennesimi i primi q × n daranno q unità e resteranno da sommare gli altri r ennesimi

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$$

$$2\,\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

I *numeri* formati con gli ennesimi

Il numero $\dfrac{m}{n}$ cioè *m* ennesimi si calcola **dividendo** *m* per *n*

$$m = q \times n + r \qquad (0 \le r < n)$$

Dato che n ennesimi fanno 1, q × n ennesimi fanno q interi
degli m ennesimi i primi q × n daranno q unità e resteranno da sommare gli altri r ennesimi

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$$

$$2\,\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$1\,\frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

Con i nuovi *numeri* la divisione tra due interi è sempre esatta e possibile!

$$\frac{2}{3}$$

È il risultato della divisione di 2 con 3:
2 diviso 3 è quel numero che sommato 3 volte fa 2

$$3 \times \frac{2}{3} = 2$$

Con i nuovi *numeri* la divisione tra due interi è sempre esatta e possibile!

$$\frac{2}{3}$$

È il risultato della divisione di 2 con 3:
2 diviso 3 è quel numero che sommato 3 volte fa 2

$$3 \times \frac{2}{3} = 2$$

In generale $\dfrac{m}{n}$ è il risultato della divisione di *m* con *n* nel senso che

$$n \times \frac{m}{n} = m$$

Con i nuovi *numeri* la divisione tra due interi è sempre esatta e possibile!

$$\frac{2}{3}$$

È il risultato della divisione di 2 con 3:
2 diviso 3 è quel numero che sommato 3 volte fa 2

$$3 \times \frac{2}{3} = 2$$

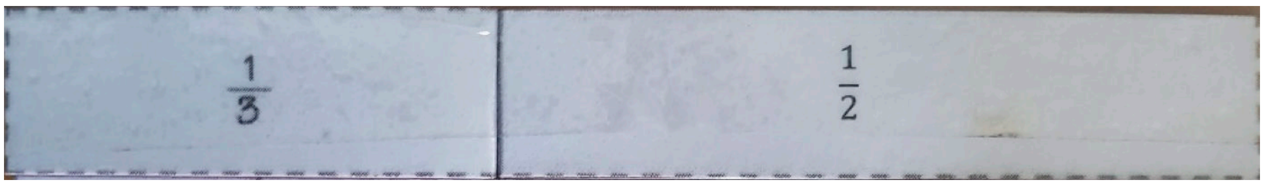
In generale $\dfrac{m}{n}$ è il risultato della divisione di *m* con *n* nel senso che

$$n \times \frac{m}{n} = m$$

La divisione diventa **l'operazione inversa** della moltiplicazione:
m diviso n è quel **numero** X tale che $n \times X = m$

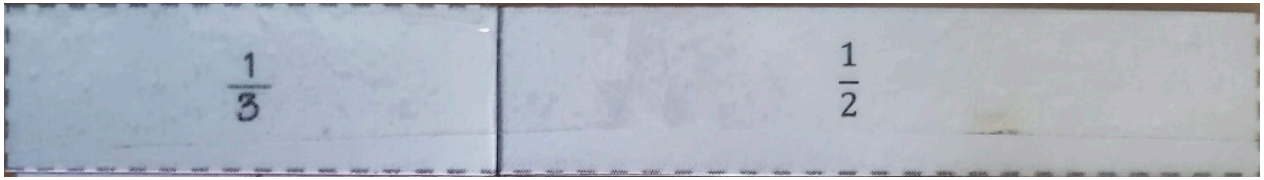
La somma di rotti

E’ impossibile sommare aste di denominazione diversa,

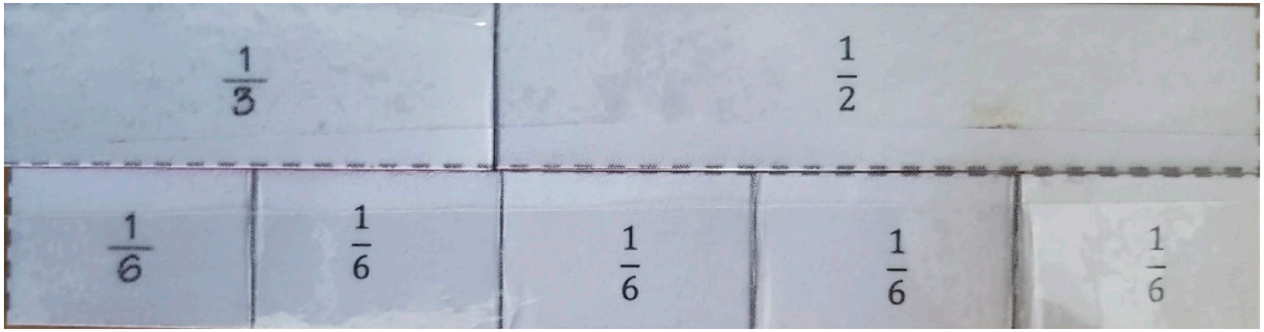


La somma di rotti

E’ impossibile sommare aste di denominazione diversa,



ma se hanno la stessa denominazione la somma si capisce



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$$

La somma di rotti

Forse gli studenti più bravi si divertono a trovare una regola generale per sommare due aste di denominazioni diverse

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{n+m}{n\times m}$$

La somma di rotti

Forse gli studenti più bravi si divertono a trovare una regola generale per sommare due aste di denominazioni diverse

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{n+m}{n\times m}$$

In generale per ogni frazione vale la regola della

$$\boxed{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\times q+n\times p}{n\times q}}$$

moltiplicazione in croce

La somma di rotti

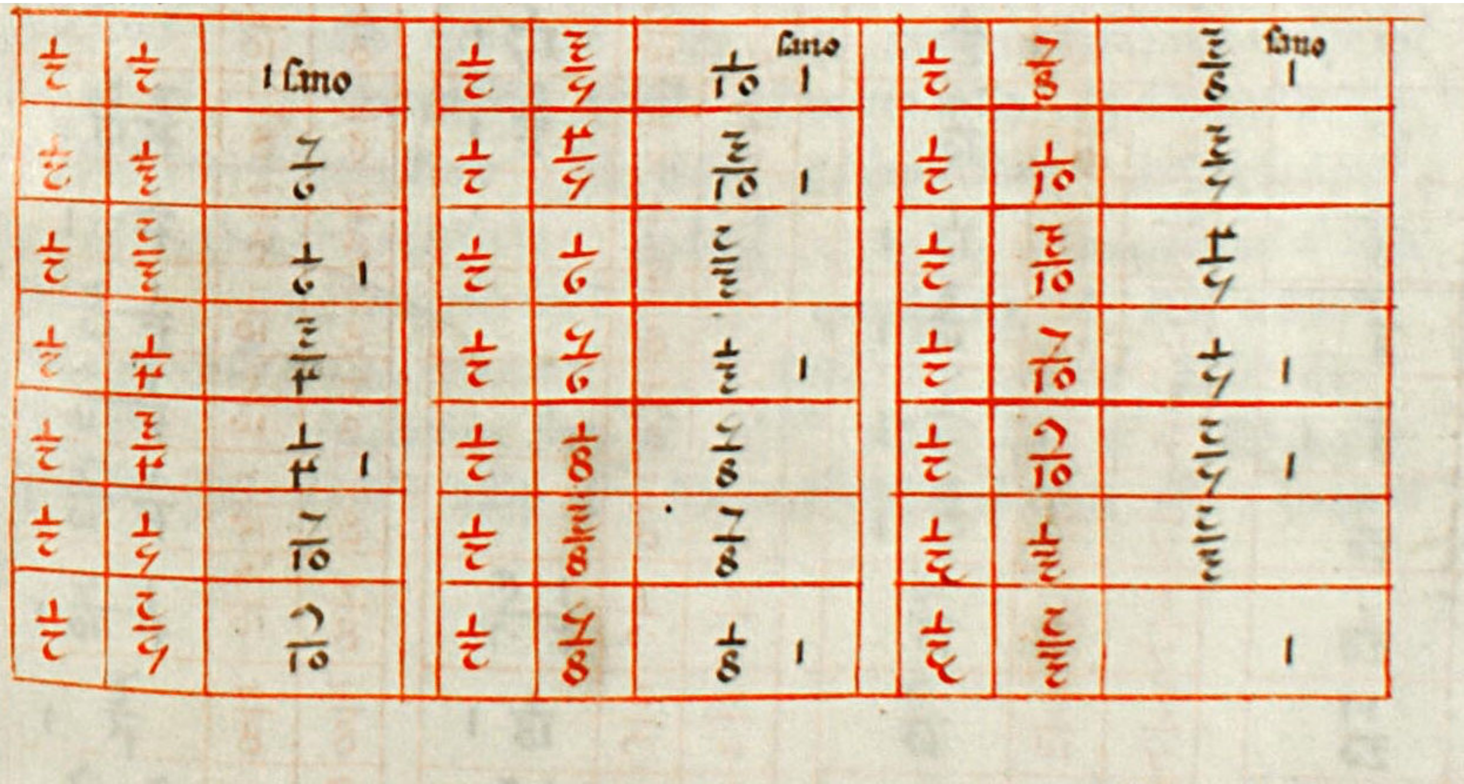
Tutti quelli (per quanto ho visto) che fin hora hanno dato regola al summar, sottrar & partir de rotti, la hanno data di sorte, che l'huomo presto la intende, & presto se la scorda, il che non procede da altro salvo che per ignorar la causa di tal sua regola, over di tal suo operare, volendo adunque rimediare a questo inconveniente, bisogna intendere il modo di ridurre duoi, over piu rotti de diverse denominationi, a una medesima denominatione, il qual atto è al contrario del schisare [semplificare].

Tartaglia, General trattato Prima Parte, Libro VII, c. 110v

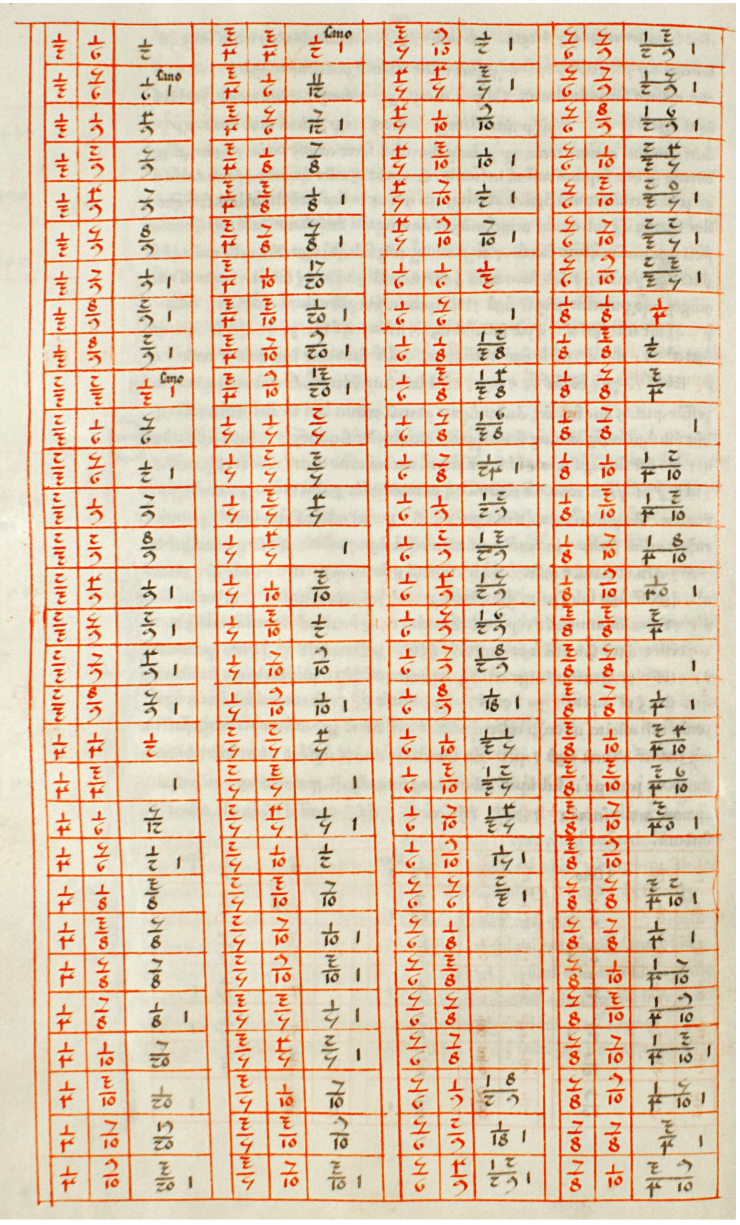
La somma di rotti

Esercizio ripetitivo da fare senza usare la regola, ma, quando possibile, con il materiale.

Costruire **grandi tabelle** da affiggere in classe che contengono in modo sistematico tutte le somme con numeratori e denominatori minori di 10



1/2	*1/2*	1
1 /2	1/3	5/6
1/2	2/3	1 1/6
1/2	1/4	3/4
1/2	3/4	1 1/4
1/2	1/5	7/10
1/2	2/5	9/10



La somma di numeri misti

Si sommano i rotti e le parti "sane"

$$2\frac{1}{3}+7\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{17}{15}=1\ \frac{2}{15}$$

$$2\frac{1}{3}+7\frac{4}{5}=2+7+1\frac{2}{15}=10\frac{2}{15}$$

Tavola sulla somma di rotti con denominatore < 10

La differenza

La differenza $a - b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

$$a - b = \mathrm{D} \text{ se e solo se } \mathrm{D} + b = a$$

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

La differenza

La differenza $a - b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

$$a - b = \mathrm{D} \text{ se e solo se } \mathrm{D} + b = a$$

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

Si rendono i due numeri *simiglianti* cioè con lo stesso denominatore e si sottraggono i numeratori

La differenza

La differenza $a - b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

$$a - b = D \text{ se e solo se } D + b = a$$

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

Si rendono i due numeri *simiglianti* cioè con lo stesso denominatore e si sottraggono i numeratori

$\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ Si riducono i due numeri a dodicesimi $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

La differenza

La differenza $a-b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

$$a - b = D \text{ se e solo se } D + b = a$$

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

Si rendono i due numeri *simiglianti* cioè con lo stesso denominatore e si sottraggono i numeri

$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ Si riducono i due numeri a dodicesimi $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{9}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$

Esercizi per allenare il cervello

La differenza

La differenza $a - b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

$$a - b = D \text{ se e solo se } D + b = a$$

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

Si rendono i due numeri *simiglianti* cioè con lo stesso denominatore
e si sottraggono i numeratori

$\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ Si riducono i due numeri a dodicesimi $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

Esercizi per allenare il cervello

Da cosa fu sottratto 1/3 che restò 1/4 ?

La differenza

La differenza $a - b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

$$a - b = D \text{ se e solo se } D + b = a$$

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

Si rendono i due numeri *simiglianti* cioè con lo stesso denominatore e si sottraggono i numeratori

$\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ Si riducono i due numeri a dodicesimi $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

Esercizi per allenare il cervello

Da cosa fu sottratto 1/3 che restò 1/4 ?

A -1/3=1/4 , A =1/3 + 1/4 =7/12
prova: 7/12-1/3 = 1/4

La differenza

La differenza $a - b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

a - *b* = D se e solo se D + *b* = *a*

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

Si rendono i due numeri *simiglianti* cioè con lo stesso denominatore e si sottraggono i numeratori

$\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ Si riducono i due numeri a dodicesimi $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

Esercizi per allenare il cervello

Da cosa fu sottratto 1/3 che restò 1/4 ?

A -1/3=1/4 , A =1/3 + 1/4 =7/12
prova: 7/12-1/3 = 1/4

Quale numero sommato a 5/6 fa 2 ¾ ?

La differenza

La differenza $a - b$ tra un numero *a* e un numero *b* (minore di *a*)
È l'operazione inversa alla somma

$$a - b = D \text{ se e solo se } D + b = a$$

a meno b è quel numero D che sommato con b da a

Si rendono i due numeri *simiglianti* cioè con lo stesso denominatore e si sottraggono i numeratori

$\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ Si riducono i due numeri a dodicesimi $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

Esercizi per allenare il cervello

Da cosa fu sottratto 1/3 che restò 1/4 ? **A** -1/3=1/4 , A =1/3 + 1/4 =7/12
prova: 7/12-1/3 = 1/4

Quale numero sommato a 5/6 fa 2 ¾ ? **N**+5/6=2 3/4

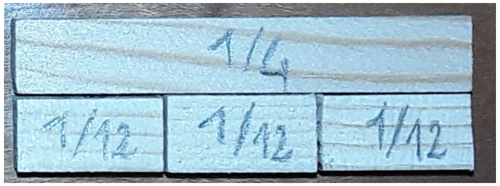
La moltiplicazione di rotti

Per definizione di frazione $\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times m$ è l'ennesima parte di *m*.

Possiamo allora estendere questo significato di prodotto anche quando *m* non è intero

$\frac{1}{n} \times \frac{1}{q}$ **è' l'ennesima parte di** 1/*q*.

Poiché 1/ *q* è la *q*-esima parte di 1, la ennesima parte di 1/*q* sarà la *n*×*q*-esima parte di 1



$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ è la terza parte di $\frac{1}{4}$ cioè $\frac{1}{12}$

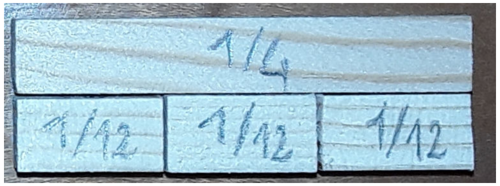
La moltiplicazione di rotti

Per definizione di frazione $\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times m$ è l’ennesima parte di m.

Possiamo allora estendere questo significato di prodotto anche quando *m* non è intero

$\frac{1}{n} \times \frac{1}{q}$ **è’ l’ennesima parte di** 1/*q*.

Poiché 1/ *q* è la *q*-esima parte di 1, la ennesima parte di 1/*q* sarà la *n*×*p*-esima parte di 1



$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ è la terza parte di $\frac{1}{4}$ cioè $\frac{1}{12}$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{q} = \frac{1}{n \times q}$$

In generale, per tutte le frazioni vale la regola

$$\boxed{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q}}$$

La moltiplicazione di rotti

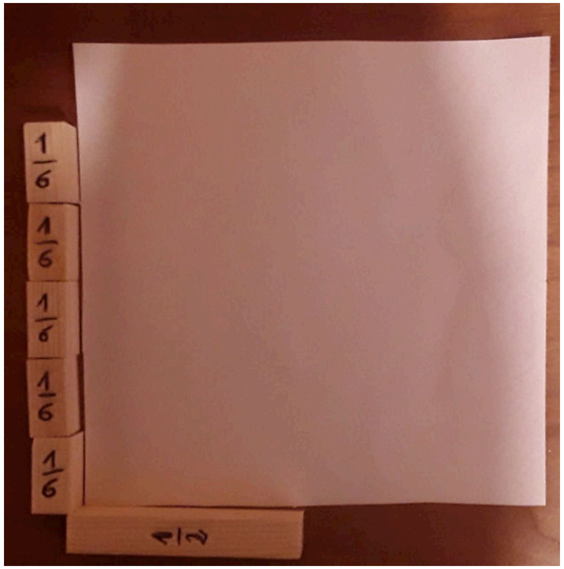
l'area di un rettangolo i cui lati siano due segmenti di lunghezza, rispetto a una unità di misura U, *m/n* e *p/q* è il prodotto dei due numeri

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}$$

La moltiplicazione di rotti

l’area di un rettangolo i cui lati siano due segmenti di lunghezza, rispetto a una unità di misura U, *m/n* e *p/q* è il prodotto dei due numeri

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$$

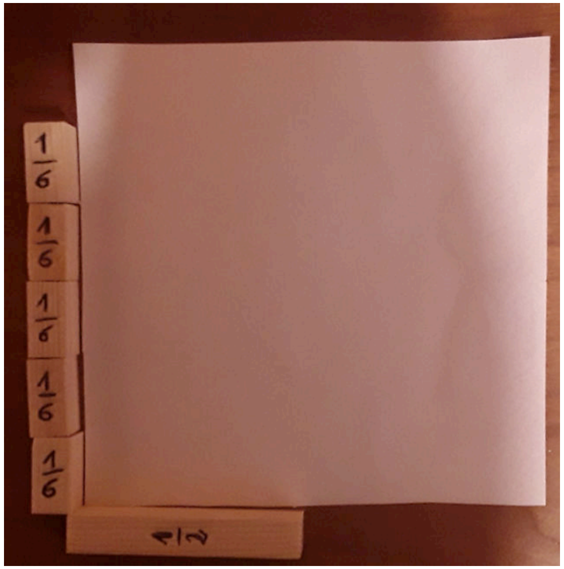


Il quadrato ha lato U
e quindi area1

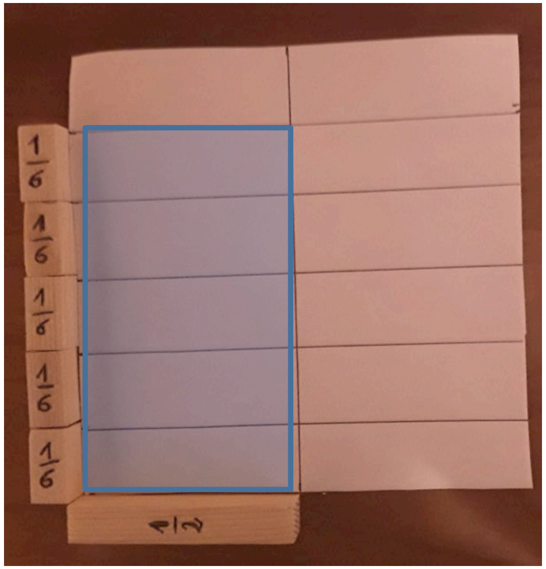
La moltiplicazione di rotti

l’area di un rettangolo i cui lati siano due segmenti di lunghezza, rispetto a una unità di misura U, *m/n* e *p/q* è il prodotto dei due numeri

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$$



Il quadrato ha lato U
e quindi area1

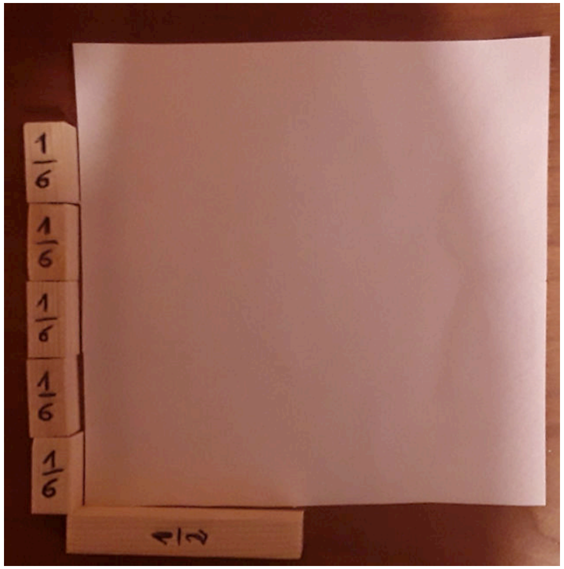


Il quadrato unitario è diviso in 12 rettangoli uguali:
L’area che cerchiamo è formata da 5 di tali rettangoli:
5 parti di 12 parti di 1

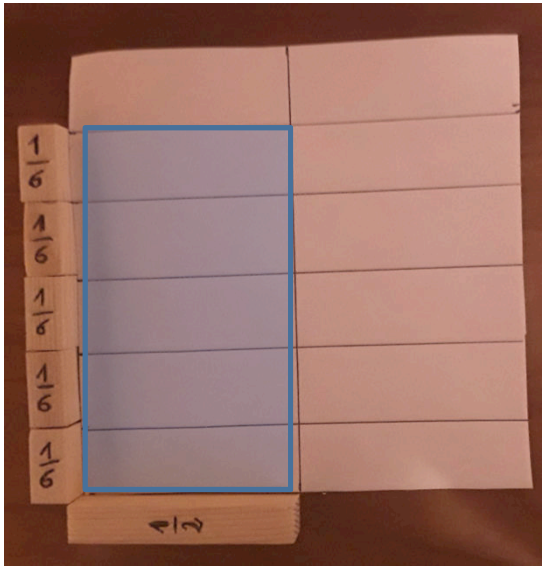
La moltiplicazione di rotti

l'area di un rettangolo i cui lati siano due segmenti di lunghezza, rispetto a una unità di misura U, *m/n* e *p/q* è il prodotto dei due numeri

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$



Il quadrato ha lato U
e quindi area1

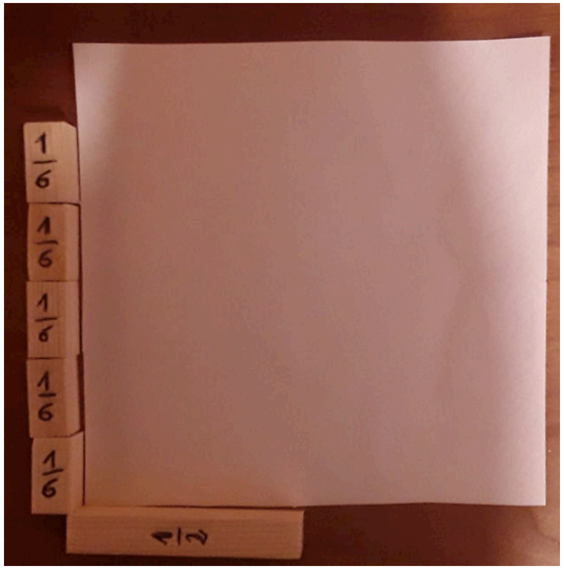


Il quadrato unitarioè diviso in 12 rettangoli uguali:
L'area che cerchiamo è formata da 5 di tali rettangoli:
5 parti di 12 parti di 1

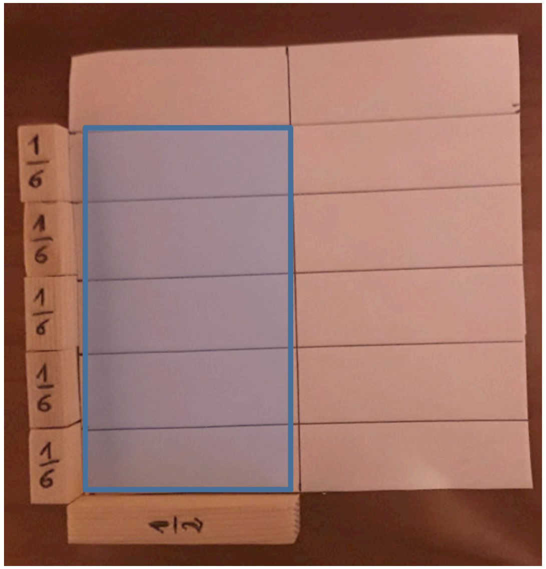
La moltiplicazione di rotti

l'area di un rettangolo i cui lati siano due segmenti di lunghezza,
rispetto a una unità di misura U, *m/n* e *p/q* è il prodotto dei due numeri

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$



$$\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q}$$



Il quadrato ha lato U
e quindi area1

Il quadrato unitarioè diviso in 12 rettangoli uguali:
L'area che cerchiamo è formata da 5 di tali rettangoli:
5 parti di 12 parti di 1

La moltiplicazione di rotti

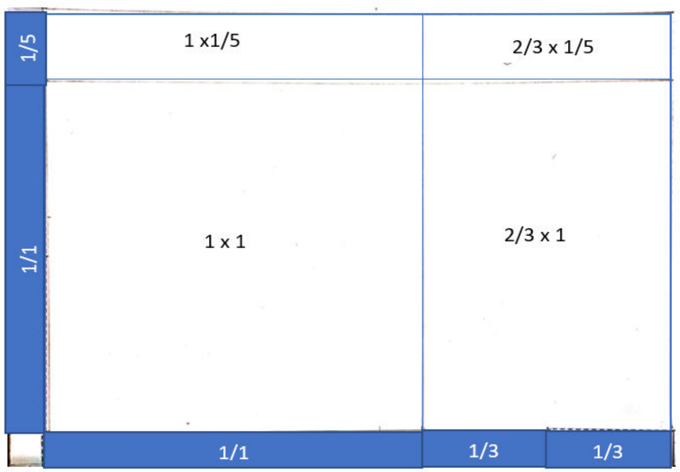
$$\boxed{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q}}$$

Maravigliati del atto di multiplicar di rotti, perche in quello sempre si vede riuscire al contrario di quello che dinota tal vocabulo, qual non dinota altro che crescere, overo augumentare, & nel detto multiplicare de rotti sempre seguita (come è detto) tutto al contrario, cioe che il produtto è sempre menore di qual si voglia di duoi precedenti...

(**Tartaglia, General trattato** (Parte Prima, Libro VII, c. 119)

La moltiplicazione di numeri misti

Si distribuiscono i fattori

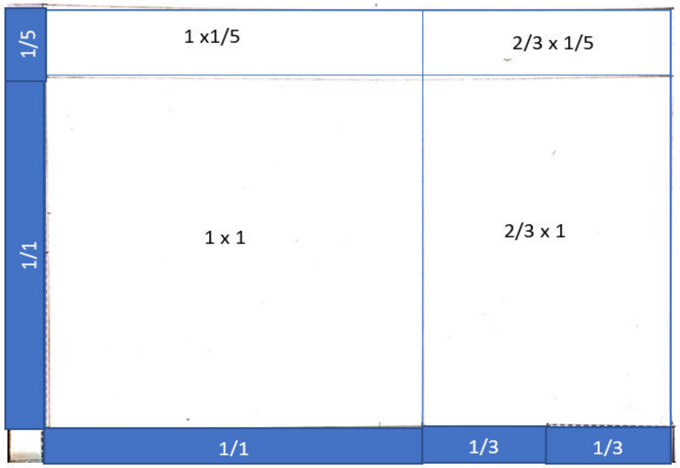


$$\left(1+\frac{2}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{5}\right)=1\times1+\frac{2}{3}\times1+1\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=$$

$$=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=1+\frac{10+3+2}{15}=2$$

La moltiplicazione di numeri misti

Si distribuiscono i fattori



$$\left(1+\frac{2}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{5}\right)=1\times1+\frac{2}{3}\times1+1\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=$$

$$=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=1+\frac{10+3+2}{15}=2$$

Oppure riduciamo i misti in frazioni e **usiamo la regola** cioè: moltiplichiamo numeratori e denominatori

$\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}$ $\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{5}$ eseguendo il prodotto $\frac{5}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{30}{15}=2$

La divisione

La divisione ora assume un nuovo fondamentale significato:
è **l'operazione inversa della moltiplicazione**

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

a diviso b è quel numero che moltiplicato per b fa a

La divisione

La divisione ora assume un nuovo fondamentale significato:
è **l'operazione inversa della moltiplicazione**

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

a diviso b è quel numero che moltiplicato per b fa a

Come per la somma, si riducono i due numeri allo stesso denominatore e poi, essendo *due numeri simiglianti* si dividono i numeratori

$$\frac{4}{{}^{2}\!/_{3}}$$

Si riducono i due numeri a terzi $\quad \dfrac{4}{{}^{2}\!/_{3}} = \dfrac{{}^{12}\!/_{3}}{{}^{2}\!/_{3}} = \dfrac{12}{2} = 6$

infatti $\quad 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$

La divisione

La divisione ora assume un nuovo fondamentale significato:
è **l'operazione inversa della moltiplicazione**

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

a diviso b è quel numero che moltiplicato per b fa a

Come per la somma, si riducono i due numeri allo stesso denominatore e poi, essendo *due numeri simiglianti* si dividono i numeratori

$$\frac{4}{2/3}$$

Si riducono i due numeri a terzi

$$\frac{4}{2/3} = \frac{12/3}{2/3} = \frac{12}{2} = 6$$

infatti $6 \times \frac{2}{3} = 4$

$$\frac{4\ 1/2}{1\ 3/4} = \frac{9/2}{7/4} = \frac{18/4}{7/4} = \frac{18}{7} = 2\ 4/7$$

La divisione

La divisione ora assume un nuovo fondamentale significato:
è **l'operazione inversa della moltiplicazione**

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

a diviso b è quel numero che moltiplicato per b fa a

Come per la somma, si riducono i due numeri allo stesso denominatore
e poi, essendo *due numeri simiglianti* si dividono i numeratori

$$\frac{4}{2/3}$$ Si riducono i due numeri a terzi $$\frac{4}{2/3} = \frac{12/3}{2/3} = \frac{12}{2} = 6$$

infatti $6 \times \frac{2}{3} = 4$

$$\frac{4\ 1/2}{1\ 3/4} = \frac{9/2}{7/4} = \frac{18/4}{7/4} = \frac{18}{7} = 2\ 4/7 \qquad (2\ 4/7) \times (1\ 3/4) = \frac{18}{7} \times \frac{7}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4\ 1/2$$

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso**

$$\frac{1}{a} \times a = 1$$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso**

$$\frac{1}{a} \times a = 1$$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

L'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ infatti $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{m \times n}{n \times m} = 1$

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso**

$$\frac{1}{a} \times a = 1$$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

L'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ infatti $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{m \times n}{n \times m} = 1$

Dividere un numero *b* per *a* equivale a **moltiplicare** *b* con l'inverso di *a*

$$\frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$$

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso**

$$\frac{1}{a} \times a = 1$$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

L'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ infatti $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{m \times n}{n \times m} = 1$

Dividere un numero *b* per *a* equivale a **moltiplicare** *b* con l'inverso di *a*

$$\frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$$

$$\frac{4\ ^1\!/_2}{1\ ^3\!/_4} = \left(\frac{1}{1\ ^3\!/_4}\right) \times 4\ ^1\!/_2 = \frac{4}{7} \times 4\ ^1\!/_2 = \frac{16}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{18}{7} = 2\ ^4\!/_7$$

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso**

$$\frac{1}{a} \times a = 1$$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

L'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ infatti $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{m \times n}{n \times m} = 1$

Dividere un numero *b* per *a* equivale a **moltiplicare** *b* con l'inverso di *a*

$$\frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$$

$$\frac{4\ \tfrac{1}{2}}{1\ \tfrac{3}{4}} = \left(\frac{1}{1\ \tfrac{3}{4}}\right) \times 4\ \tfrac{1}{2} = \frac{4}{7} \times 4\ \tfrac{1}{2} = \frac{16}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{18}{7} = 2\ \tfrac{4}{7}$$

Esercizi per allenare il cervello

Quale numero moltiplicato per 2/3 fa 5?

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso**

$$\frac{1}{a} \times a = 1$$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

L'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ infatti $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{m \times n}{n \times m} = 1$

Dividere un numero *b* per *a* equivale a **moltiplicare** *b* con l'inverso di *a*

$$\frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$$

$$\frac{4\ \tfrac{1}{2}}{1\ \tfrac{3}{4}} = \left(\frac{1}{1\ \tfrac{3}{4}}\right) \times 4\ \tfrac{1}{2} = \frac{4}{7} \times 4\ \tfrac{1}{2} = \frac{16}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{18}{7} = 2\ \tfrac{4}{7}$$

Esercizi per allenare il cervello

Quale numero moltiplicato per 2/3 fa 5? Xx2/3 = 5 , X= 5 × 3/2=15/2=7 1/2

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso**

$$\frac{1}{a}\times a = 1$$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

L'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ infatti $\frac{m}{n}\times\frac{n}{m}=\frac{m\times n}{n\times m}=1$

Dividere un numero *b* per *a* equivale a **moltiplicare** *b* con l'inverso di *a*

$$\frac{b}{a} = b\times\frac{1}{a}$$

$$\frac{4\ \frac{1}{2}}{1\ \frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{1\ \frac{3}{4}}\right)\times 4\ \frac{1}{2} = \frac{4}{7}\times 4\ \frac{1}{2} = \frac{16}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{2} = \frac{18}{7} = 2\ \frac{4}{7}$$

Esercizi per allenare il cervello

Quale numero moltiplicato per 2/3 fa 5? Xx2/3 = 5 , X= 5 × 3/2=15/2=7 1/2

Che fu quel numero che diviso per 3 ½ ne venne 5 2/3

La divisione

Si può fare in un altro modo: **moltiplicando per l'inverso** $\frac{1}{a} \times a = 1$

L'inverso di a è quel numero che moltiplicato per a fa 1

L'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ infatti $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{m \times n}{n \times m} = 1$

Dividere un numero *b* per *a* equivale a **moltiplicare** *b* con l'inverso di *a*

$$\frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$$

$$\frac{4 \ \frac{1}{2}}{1 \ \frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{1 \ \frac{3}{4}}\right) \times 4 \ \frac{1}{2} = \frac{4}{7} \times 4 \ \frac{1}{2} = \frac{16}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{18}{7} = 2 \ \frac{4}{7}$$

Esercizi per allenare il cervello

Quale numero moltiplicato per 2/3 fa 5? Xx2/3 = 5 , X= 5 × 3/2=15/2=7 1/2

Che fu quel numero che diviso per 3 ½ ne venne 5 2/3 X/3 ½ =5 2/3 X=5 2/3 × 3 ½

La divisione con la virgola

La frazione si sviluppa in potenze di 10 negative

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{100} + \frac{r_3}{1000} + \ldots \quad \text{cioè} \quad \frac{m}{n} = q, r_1 r_2 r_3 \ldots\ldots$$

La divisione con la virgola

La frazione si sviluppa in potenze di 10 negative

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{100} + \frac{r_3}{1000} + \ldots \quad \text{cioè} \quad \frac{m}{n} = q, r_1 r_2 r_3 \ldots\ldots$$

Il calcolo della prima cifra decimale $\quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{m \times 10}{n}$

La divisione con la virgola

La frazione si sviluppa in potenze di 10 negative

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{100} + \frac{r_3}{1000} + \ldots \quad \text{cioè} \quad \frac{m}{n} = q, r_1 r_2 r_3 \ldots\ldots$$

Il calcolo della prima cifra decimale $\quad \frac{m}{n} = \frac{1}{10} \times \frac{m \times 10}{n}$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{10} \times \frac{20}{7} = \frac{1}{10} \times \left(2 + \frac{6}{7}\right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{70} \approx 0,2$$

Approssimando con una cifra decimale si fa un errore di 6/70

La divisione con la virgola

La frazione si sviluppa in potenze di 10 negative

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{100} + \frac{r_3}{1000} + \ldots \quad \text{cioè} \quad \frac{m}{n} = q, r_1 r_2 r_3 \ldots\ldots$$

Il calcolo della prima cifra decimale $\frac{m}{n} = \frac{1}{10} \times \frac{m \times 10}{n}$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{10} \times \frac{20}{7} = \frac{1}{10} \times \left(2 + \frac{6}{7}\right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{70} \approx 0,2$$

Approssimando con una cifra decimale si fa un errore di 6/70

Il calcolo della seconda cifra decimale

Approssimando con una cifra decimale si fa un errore di 4/700

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{100} \times \frac{200}{7} = \frac{1}{100} \times \left(28 + \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{700} \approx 0,28$$

La divisione con la virgola

La frazione si sviluppa in potenze di 10 negative

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{100} + \frac{r_3}{1000} + \dots \quad \text{cioè} \quad \frac{m}{n} = q, r_1 r_2 r_3 \dots\dots$$

Il calcolo della prima cifra decimale $\frac{m}{n} = \frac{1}{10} \times \frac{m \times 10}{n}$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{10} \times \frac{20}{7} = \frac{1}{10} \times \left(2 + \frac{6}{7}\right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{70} \approx 0,2$$

Approssimando con una cifra decimale si fa un errore di 6/70

Il calcolo della seconda cifra decimale

Approssimando con una cifra decimale si fa un errore di 4/700

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{100} \times \frac{200}{7} = \frac{1}{100} \times \left(28 + \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{700} \approx 0,28$$

Lo sviluppo decimale non ha fine e si ottiene in generale **un valore approssimato**

La divisione con la virgola

Sommiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 + 0,28 = 0,56

La divisione con la virgola

Sommiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 + 0,28 = 0,56 ma $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

Moltiplichiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

La divisione con la virgola

Sommiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 + 0,28 = 0,56 ma $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

Moltiplichiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 x 0,28 = 0,0784

La divisione con la virgola

Sommiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 + 0,28 = 0,56 ma $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

Moltiplichiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 x 0,28 = 0,0784 ma $\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 0,08$

La divisione con la virgola

Sommiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 + 0,28 = 0,56 ma $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

Moltiplichiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 x 0,28 = 0,0784 ma $\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 0,08$

L’errore **si espande** in modo incontrollato e questo
in astronomia dove di lavora con “numeri astronomici”
o nel commercio su grande scala è intollerabile!

La divisione con la virgola

Sommiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 + 0,28 = 0,56 ma $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

Moltiplichiamo $\frac{2}{7} \approx 0,28$ con se stesso

0,28 x 0,28 = 0,0784 ma $\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \approx 0,08$

L'errore **si espande** in modo incontrollato e questo in astronomia dove di lavora con "numeri astronomici" o nel commercio su grande scala è intollerabile!

Prima degli arabi e di Fibonacci non c'erano le frazioni?

Il sistema di calcolo babilonese

I rotti si sviluppano in potenze di 60 negative

$$a = \frac{r_1}{60} + \frac{r_2}{60^2} + \frac{r_3}{60^3} + \dots \quad = r_1{'}\ r_2{''}\ r_3{'''}$$

Si legge r_1 primi, r_2 secondo , r_3 terzi ...

Il sistema di calcolo babilonese

I rotti si sviluppano in potenze di 60 negative

$$a=\frac{r_1}{60}+\frac{r_2}{60^2}+\frac{r_3}{60^3}+\dots \quad = r_1{}'\; r_2{}''\; r_3{}'''$$

Si legge r_1 primi, r_2 secondo , r_3 terzi ...

$$\frac{2}{7}=\frac{60\times 2}{60\times 7}=\frac{1}{60}\left(\frac{120}{7}\right)=\frac{1}{60}\left(17+\frac{1}{7}\right)=\frac{17}{60}+\frac{1}{420}\approx 17'$$

Approssimando in primi
si fa un errore di 1/420

Il sistema di calcolo babilonese

I rotti si sviluppano in potenze di 60 negative

$$a = \frac{r_1}{60} + \frac{r_2}{60^2} + \frac{r_3}{60^3} + \ldots \quad = r_1{}'\ r_2{}''\ r_3{}'''$$

Si legge r_1 primi, r_2 secondo , r_3 terzi ...

$$\frac{2}{7} = \frac{60 \times 2}{60 \times 7} = \frac{1}{60}\left(\frac{120}{7}\right) = \frac{1}{60}\left(17 + \frac{1}{7}\right) = \frac{17}{60} + \frac{1}{420} \approx 17'$$

Approssimando in primi
si fa un errore di 1/420

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{60^2} \times \frac{60^2 \times 2}{7} = \frac{1}{60^2} \times \frac{7200}{7} = \frac{1}{60^2} \times \left(1028 + \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{60^2}\left(17 \times 60 + 8 + \frac{4}{7}\right) =$$

$$= \frac{17}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{4}{7 \times 60^2} \approx 17'\ 8''$$

Approssimando in secondi
si fa un errore di 4/25200

Il sistema di calcolo babilonese

I rotti si sviluppano in potenze di 60 negative

$$a = \frac{r_1}{60} + \frac{r_2}{60^2} + \frac{r_3}{60^3} + \dots \quad = r_1{}' \; r_2{}'' \; r_3{}'''$$

Si legge r_1 primi, r_2 secondo , r_3 terzi ...

$$\frac{2}{7} = \frac{60 \times 2}{60 \times 7} = \frac{1}{60}\left(\frac{120}{7}\right) = \frac{1}{60}\left(17 + \frac{1}{7}\right) = \frac{17}{60} + \frac{1}{420} \approx 17'$$

Approssimando in primi
si fa un errore di 1/420

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{60^2} \times \frac{60^2 \times 2}{7} = \frac{1}{60^2} \times \frac{7200}{7} = \frac{1}{60^2} \times \left(1028 + \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{60^2}\left(17 \times 60 + 8 + \frac{4}{7}\right) =$$

$$= \frac{17}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{4}{7 \times 60^2} \approx 17' \; 8''$$

Approssimando in secondi
si fa un errore di 4/25200

10 x (17’ 8’’) = 170’ 80’’ = 170’ + 80’’ = 2 50’ + 1’ 2’’= 2 51’ 2’’

Il sistema di calcolo babilonese

I rotti si sviluppano in potenze di 60 negative

$$a = \frac{r_1}{60} + \frac{r_2}{60^2} + \frac{r_3}{60^3} + \ldots \quad = r_1{}' \; r_2{}'' \; r_3{}'''$$

Si legge r_1 primi, r_2 secondo , r_3 terzi ...

$$\frac{2}{7} = \frac{60 \times 2}{60 \times 7} = \frac{1}{60}\left(\frac{120}{7}\right) = \frac{1}{60}\left(17 + \frac{1}{7}\right) = \frac{17}{60} + \frac{1}{420} \approx 17'$$

Approssimando in primi
si fa un errore di 1/420

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{60^2} \times \frac{60^2 \times 2}{7} = \frac{1}{60^2} \times \frac{7200}{7} = \frac{1}{60^2} \times \left(1028 + \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{60^2}\left(17 \times 60 + 8 + \frac{4}{7}\right) =$$

$$= \frac{17}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{4}{7 \times 60^2} \approx 17' \; 8''$$

Approssimando in secondi
si fa un errore di 4/25200

10 x (17’ 8’’) = 170’ 80’’ = 170’ + 80’’ = 2 50’ + 1’ 2’’= 2 51’ 2’’

Ma $\frac{20}{7} = 2 \quad 51' \;\; 15''$

L'aritmetizzazione della geometria

Il **rapporto** tra due grandezze **diventa un numero**, non è più un **logos**, un ragionamento

$n : m$ si identifica con la frazione $\dfrac{m}{n}$

A : B = $\dfrac{m}{n}$ allora **A** = $\dfrac{m}{n}$ **B** che significa che **A** è *m* ennesimi di **B**

L’aritmetizzazione della geometria

Il **rapporto** tra due grandezze **diventa un numero** non è più un **logos**, un ragionamento

$n : m$ si identifica con la frazione $\dfrac{m}{n}$

A : B = $\dfrac{m}{n}$ allora **A** = $\dfrac{m}{n}$ **B** che significa che **A** è *m* ennesimi di **B**

Si introduce una unità di misura U per le grandezze: la misura di un segmento AB non è più il rapporto AB **: U** ma il **numero** *a* che esprime tale rapporto.

L'aritmetizzazione della geometria

Il **rapporto** tra due grandezze **diventa un numero** non è più un **logos**, un ragionamento

$n : m$ si identifica con la frazione $\dfrac{m}{n}$

A : B = $\dfrac{m}{n}$ allora **A** = $\dfrac{m}{n}$ **B** che significa che **A** è *m* ennesimi di **B**

Si introduce una unità di misura U per le grandezze: la misura di un segmento AB non è più il rapporto AB **: U** ma il **numero** *a* che esprime tale rapporto.

In generale se **A** e **B** sono due grandezze e *a* e *b* sono le loro misure, allora **A : B** si identifica con il rapporto tra le rispettive misure cioè con il numero *a* diviso *b.*

L’aritmetizzazione della geometria

Il **rapporto** tra due grandezze **diventa un numero** non è più un **logos**, un ragionamento

$n : m$ si identifica con la frazione $\dfrac{m}{n}$

A : B = $\dfrac{m}{n}$ allora **A** = $\dfrac{m}{n}$ **B** che significa che **A** è *m* ennesimi di **B**

Si introduce una unità di misura U per le grandezze: la misura di un segmento AB non è più il rapporto AB **: U** ma il **numero** *a* che esprime tale rapporto.

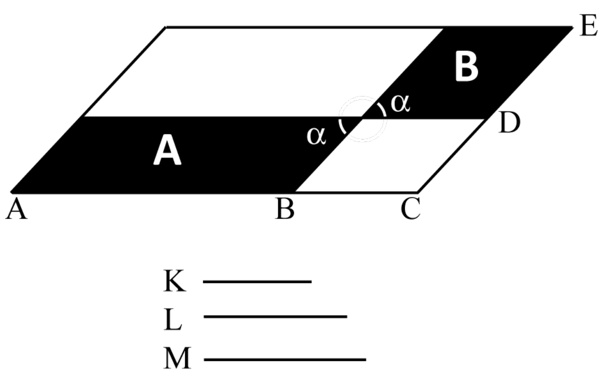
In generale se **A** e **B** sono due grandezze e *a* e *b* sono le loro misure, allora **A : B** si identifica con il rapporto tra le rispettive misure cioè con il numero *a* diviso *b.*

4 grandezze sono in proporzione, **A : B** = **C : D** se e solo se lo sono le loro misure, cioè

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ovvero} \quad \frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b} \quad \text{in definitiva} \quad a \times d = c \times b$$

L’aritmetizzazione della geometria

Un esempio Euclide VI.23



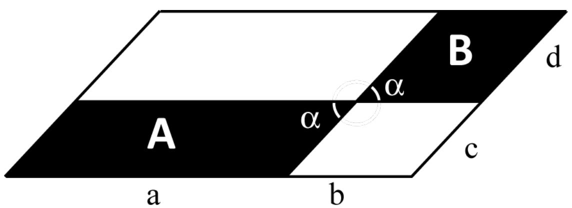
Euclide (VI, 23)
Due parallelogrammi simili stanno tra loro
come il rapporto composto del rapporto tra i lati

$$AB : BC = K : L \quad , CD : DE = L : M$$

$$\mathbf{A : B} = K : M$$

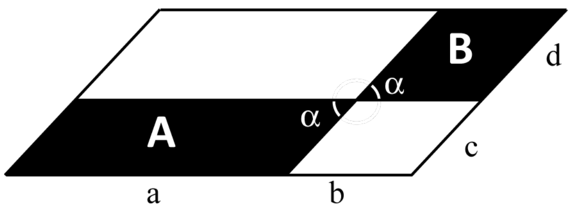
L'aritmetizzazione della geometria

Un esempio Euclide VI.23



L’aritmetizzazione della geometria

Un esempio Euclide VI.23



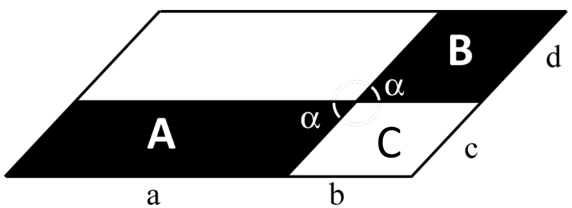
Euclide (VI, 23)

Dati due parallelogrammi simili di lati *a,c* e *b,d* allora

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

L'aritmetizzazione della geometria

Un esempio Euclide VI.23



Euclide (VI, 23)

Dati due parallelogrammi simili di lati *a,c* e *b,d* allora

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

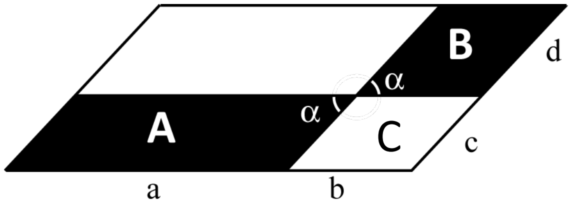
Dimostrazione

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}} = \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}} = \frac{c}{d}$$

Eseguendo il prodotto $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}} \times \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

L'aritmetizzazione della geometria

Un esempio Euclide VI.23



Euclide (VI, 23)
Dati due parallelogrammi simili di lati *a,c* e *b,d* allora

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

Dimostrazione

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}} = \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}} = \frac{c}{d}$$

Eseguendo il prodotto $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}} \times \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

In particolare $\frac{\mathbf{A}}{a \times c} = \frac{\mathbf{B}}{b \times d}$

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare 50 braccia di panno con del cotone

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare 50 *braccia di panno con del cotone*

20 braccia di panno valgono 3 lire
(1 braccio circa ½ metro)

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare 50 *braccia di panno con del cotone*

Quanto valgono le 50 braccia di panno?

20 braccia di panno valgono 3 lire
(1 braccio circa ½ metro)

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare 50 *braccia di panno con del cotone*

Quanto valgono le 50 braccia di panno? Lire $\frac{3}{20} \times 50 = 7\ \frac{1}{2}$

20 braccia di panno valgono 3 lire
(1 braccio circa ½ metro)

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

1 Lira è 20 soldi

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	**50**

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare 50 *braccia di panno con del cotone*

Quanto valgono le 50 braccia di panno? Lire $\frac{3}{20} \times 50 = 7\,\frac{1}{2}$

Con 1 lira quanto cotone si compra?

20 braccia di panno valgono 3 lire
(1 braccio circa ½ metro)

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

1 Lira è 20 soldi

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	**50**

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare 50 *braccia di panno con del cotone*

Quanto valgono le 50 braccia di panno? Lire $\frac{3}{20} \times 50 = 7\tfrac{1}{2}$

Con 1 lira quanto cotone si compra? Rotuli $\frac{42}{5} = 8\tfrac{2}{5}$

20 braccia di panno valgono 3 lire
(1 braccio circa ½ metro)

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

1 Lira è 20 soldi

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	**50**

A ciò che nisuno sia ingannato

20 braccia di panno valgono 3 lire
(1 braccio circa ½ metro)

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

1 Lira è 20 soldi

Un mercante vuole barattare 50 *braccia di panno con del cotone*

Quanto valgono le 50 braccia di panno? Lire $\frac{3}{20} \times 50 = 7\,½$

Con 1 lira quanto cotone si compra? Rotuli $\frac{42}{5} = 8\,\tfrac{2}{5}$

Con lire 7 ½ **equità** vuole che si ottengano $\left(7\tfrac{1}{2}\right) \times \left(8\tfrac{2}{5}\right) = 63$ rotuli

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	**50**

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare 50 *braccia di panno con del cotone*

Quanto valgono le 50 braccia di panno? Lire $\frac{3}{20} \times 50 = 7\,½$

Con 1 lira quanto cotone si compra? Rotuli $\frac{42}{5} = 8\,{}^{2}\!/\!_{5}$

Con lire 7 ½ **equità** vuole che si ottengano $(7\,{}^{1}\!/\!_{2}) \times (8\,{}^{2}\!/\!_{5}) = 63$ rotuli

20 braccia di panno valgono 3 lire
(1 braccio circa ½ metro)

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

1 Lira è 20 soldi

Rotuli	lire	braccia
63	3	20
42	5	**50**

$$\frac{50 \times 3 \times 42}{20 \times 5}$$

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare X braccia di panno con del cotone

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

1 braccio di panno vale 3 soldi
(1 braccio circa ½ metro)

1 Lira è 20 soldi

Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	

Rotuli	lire	braccia
Y	3	20
42	5	X

$$Y = \frac{X \times 3 \times 42}{5 \times 20}$$

A ciò che nisuno sia ingannato

Un mercante vuole barattare X braccia di panno con del cotone

42 rotuli di cotone valgono 5 lire
(1 rotulo circa ½ chilo)

1 braccio di panno vale 3 soldi
(1 braccio circa ½ metro)

1 Lira è 20 soldi

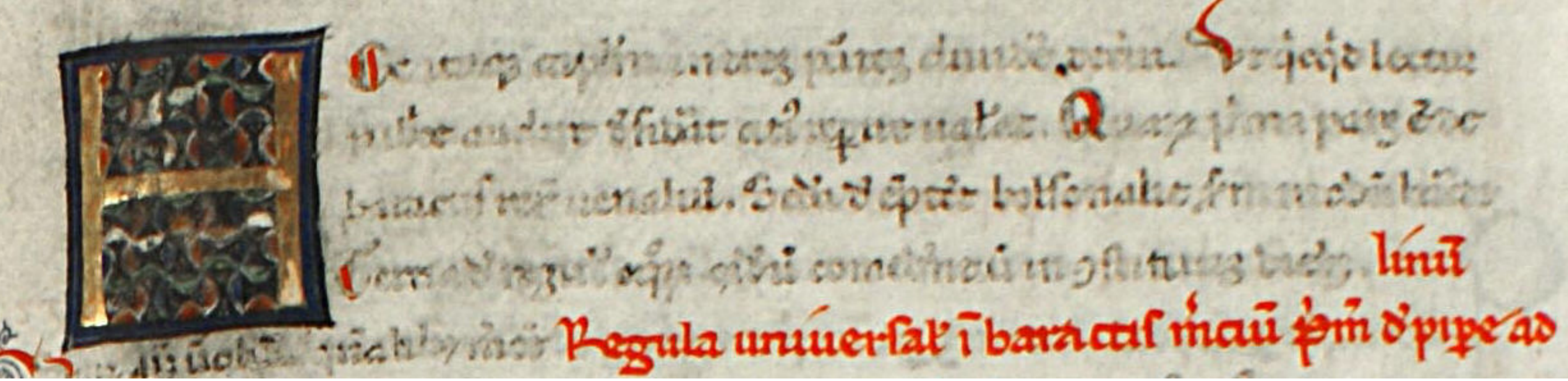
Rotuli	lire	braccia
	3	20
42	5	

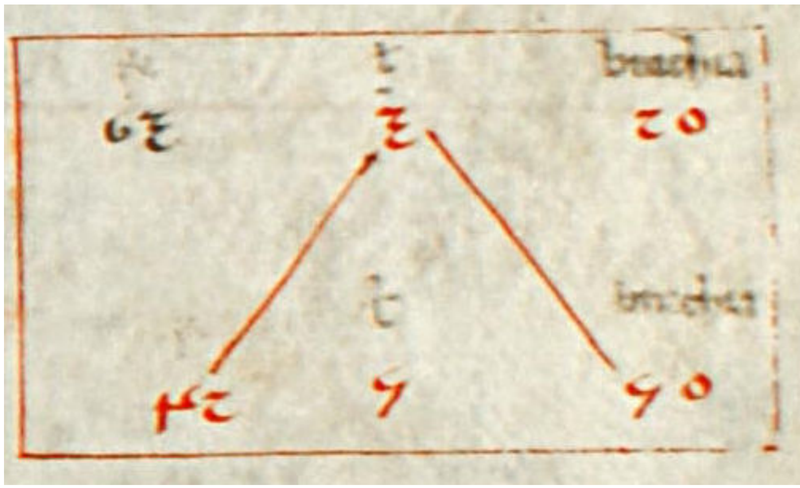
Rotuli	lire	braccia
Y	3	20
42	5	X

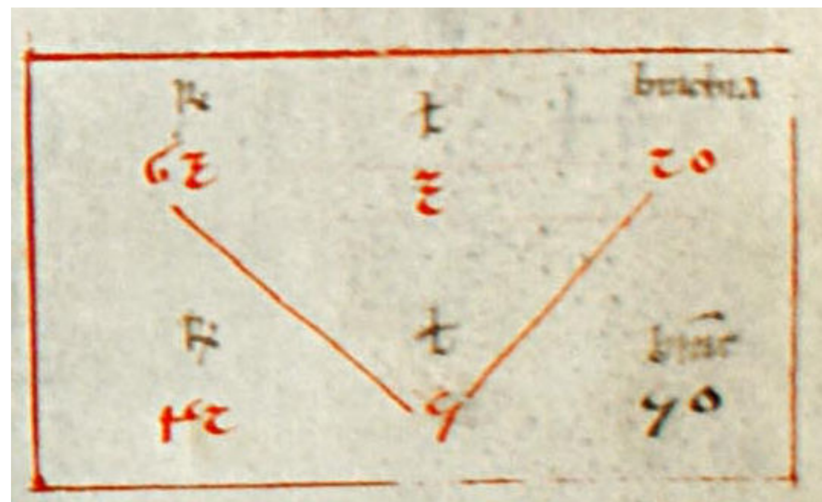
$$Y = \frac{X \times 3 \times 42}{5 \times 20}$$

Rotuli	lire	braccia
Y	3	20
42	5	X

$$X = \frac{Y \times 5 \times 20}{3 \times 42}$$




brachia


brachia

DOMANDE

1 Questo approccio storico allo studio delle frazioni è sostanzialmente diverso da quello tradizionale? Se sì, ritenete necessario un corso di formazione dedicato a questo argomento?

2 L'introduzione dei numeri misti complica invece di rendere più concreto il concetto di frazione?

3 Dare più metodi di calcolo per sommare o moltiplicare o dividere due frazioni è una perdita di tempo che complica ulteriormente una materia già difficile?

4 I riferimenti storici possono essere recepiti dagli allievi come valore aggiunto alla materia di studio

5 Gli studenti nella loro fase di sviluppo cognitivo hanno la maturità sufficiente per un approccio più concettuale al al calcolo?